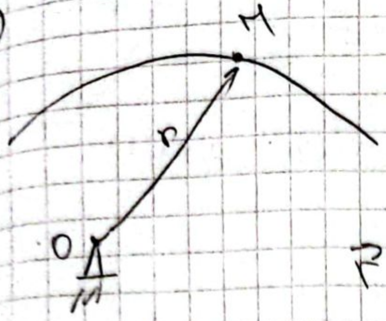
Механика усмени

1

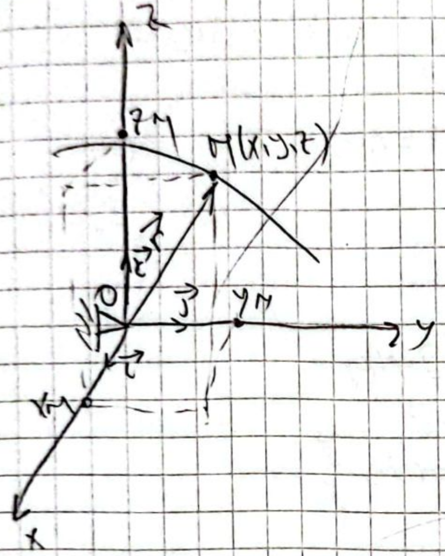


$\vec{r} = \vec{OM}$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон кретања тачке M у векторском облику

$\vec{r}(t)$ → непрекидна ф-ја најмање 2x диференцијабилна

2



$\vec{r} = \vec{OM}$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

x – апсциса

y – ордината

z – апликата

$$\underbrace{x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)}$$

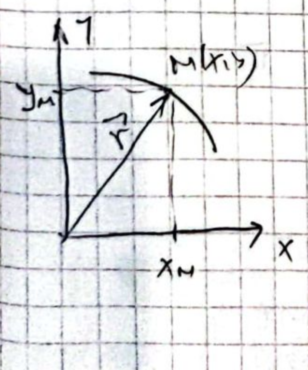
коначне једн. кретања

кинемат. једн. кретања

$t = f(z)$

$x = x(t) = \underline{x(f(z))}$

линија путање



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$x = x(t)$

$y = y(t)$

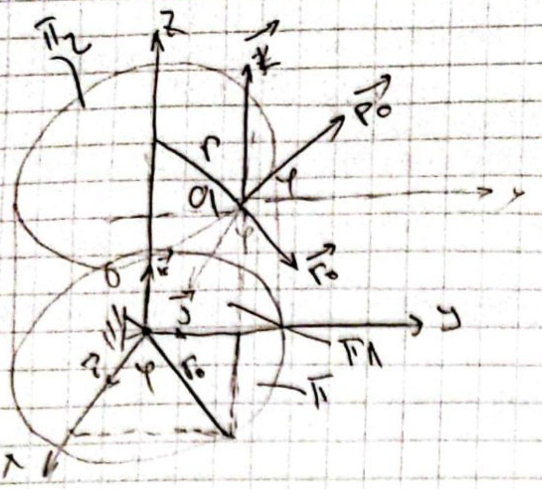
$t = f(y)$

$\underline{x = x(y)}$

линија путање = трајекторија

(4) поларне — поларно -ц.

$r_0, p_0 = 1$



$$\vec{r_0} = \underbrace{r_0\cos\varphi}_{x}\,\vec{i} + \underbrace{r_0\sin\varphi}_{y}\,\vec{j}$$

$\vec{r}=\vec{r}(t)$ $\quad \varphi=\varphi(t) \quad z=z(t)$

$$\boxed{\vec{r} = r\,\vec{r_0}}$$

$$\vec{p_0} = -p_0\sin\varphi\,\vec{i} + p_0\cos\varphi\,\vec{j}$$

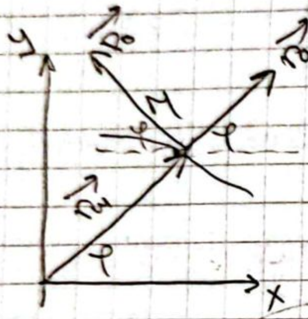
– угао $\varphi \cdot p_0 = \pi$

1 – $r \cdot z = \pi_1$

– $\varphi \cdot r = \pi_2$

поларно – цил. коо сист $O, r_0 p_0 k$

$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad z=z$

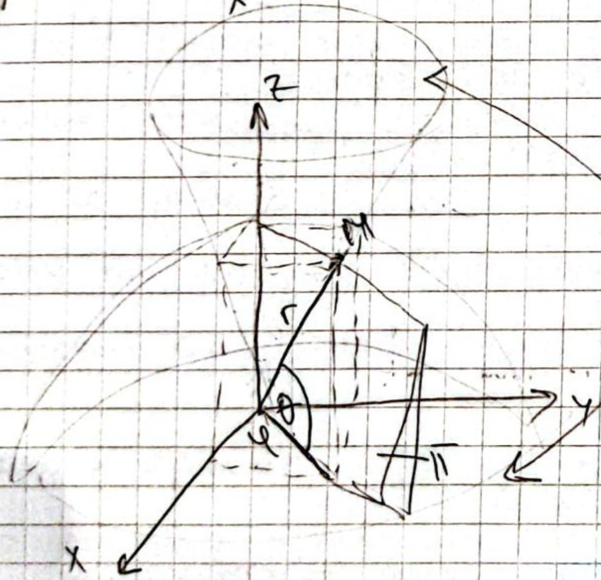


$z=0 \quad r=r(t) \quad , \varphi=\varphi(t)$

$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

(5)

$r=r(t), \theta=\theta(t), \varphi=\varphi(t),$ ~~...~~



$\theta \cdot \varphi$ – омот. сфере

$r \cdot \varphi$ – конус

$r \cdot \theta$ – раван π

$M(r, \varphi, \theta)$

$x = r\cos\theta\cos\varphi$

$y = r\cos\theta\sin\varphi$

$z = r\sin\theta$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\sin\varphi = \frac{y}{r}$

$\cos\varphi = \frac{x}{r}$

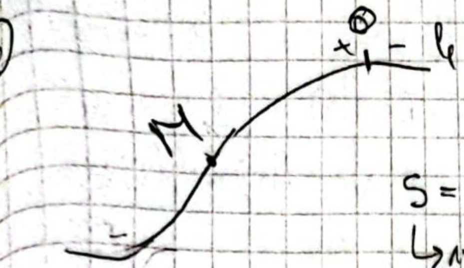
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ ✓

$\sin\theta = \frac{z}{r}$

$\theta = \arcsin\frac{z}{r}$ ✓

⑥



за почетно бр. кретања тачке произвољни пункт, одређено је

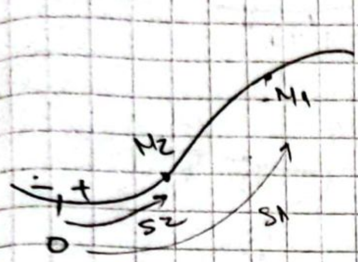
$S = \overset{\frown}{OM}$ називам трајекторију тачке

↳ лучна коорд.

$S = f(t)$

закон кретања тачке по путањи

$$S = \sum_{i}^{n} |\Delta S_i|$$



$S = |S_1 - S_0| + |S_2 - S_1|$

$S = S_1 + |S_2 - S_1|$

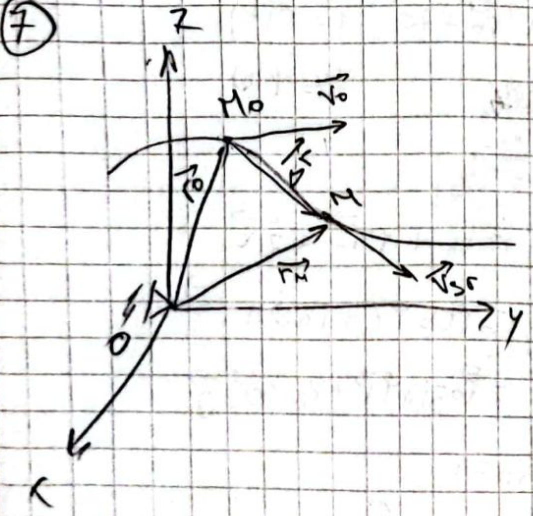
$$S = \sum_{i}^{n} |\Delta S_i|$$

$\Delta S_i \to 0$

$$S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i}^{n} |\Delta S_i| = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_0$

⑦



$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$ $\qquad r(t_2) - r(t_1)$

$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M$

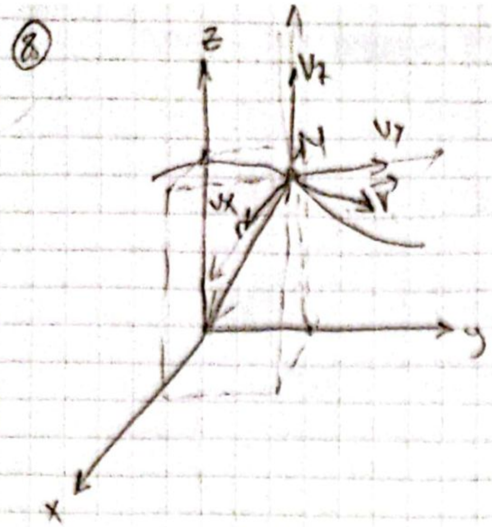
$$\vec{V}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}_M}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_M - \vec{r}_0}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_M}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}}$$

У гран. случ. $\Delta t \to 0$ M_0M је ≈ праволинијска и тада је правац $\vec{V}$ правац тангенте на путању, а смер одр. ~~пресеком~~ смером $\Delta\vec{r}$, промене ра

⑧



$\vec{V} = \dot{\vec{r}}$ $\qquad r = r(t)$

$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ $\qquad V = f(r) = f(r(t))$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

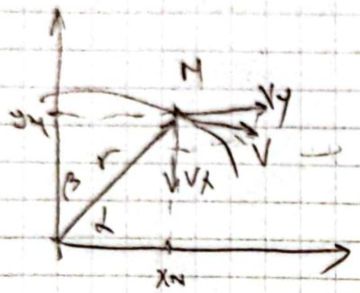
$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$

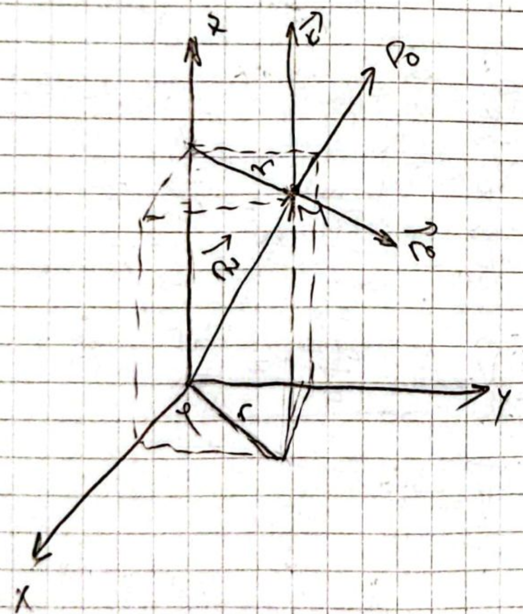
$V_x = \dot{x}, \; V_y = \dot{y}, \; V_z = \dot{z}$

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{V}, \; \cos\beta = \frac{\dot{y}}{V}, \; \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{V}$



⑨



$\vec{r} = r\vec{r_0} + z\vec{k}$ $\qquad \vec{r} = \vec{r}(t)$

$\varphi = \varphi(t)$

$\vec{V} = \dot{\vec{r}}$

$\vec{V} = \dot{r}\vec{r_0} + r\dot{\vec{r_0}} + \dot{z}\vec{k}$

$\vec{r_0} = r_0\cos\varphi\vec{i} + r_0\sin\varphi\vec{j}$

$\vec{p_0} = -p_0\sin\varphi\vec{i} + p_0\cos\varphi\vec{j}$

$r_0 = p_0 = 1$

$\dot{\vec{r_0}} = \dot{r_0}\cos\varphi\vec{i} + r_0(-\sin\varphi)\dot{\varphi}\vec{i}$

$\quad + \dot{r_0}\sin\varphi\vec{j} + r_0\cos\varphi\dot{\varphi}\vec{j}$

$\cancel{\dot{\vec{r_0}} = r_0\dot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)}$

$\dot{\vec{r_0}} = \dot{\varphi}(r_0\cos\varphi\vec{j} - r_0\sin\varphi\vec{i}), \; r_0 = 1$

$\boxed{\dot{\vec{r_0}} = \dot{\varphi}\vec{p_0}}$

$\vec{V} = \dot{r}\vec{r_0} + r\dot{\varphi}\vec{p_0} + \dot{z}\vec{k}$

$V_r = \dot{r}$ $\quad V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2}$ $\quad \cos\alpha = \frac{\dot{r}}{V}$

$V_\varphi = r\dot{\varphi}$ $\quad V = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$ $\quad \cos\beta = \frac{r\dot{\varphi}}{V}$

$V_z = \dot{z}$ $\quad \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{V}$

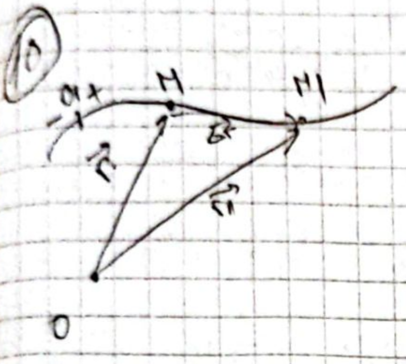
$\dot{\vec{p}}_1 = -\cancel{\dot{p}_0 \sin\varphi \vec{i}} - p_0 \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \vec{i} + \cancel{\dot{p}_0 \cos\varphi \vec{j}} - p_0 \sin\varphi \dot{\varphi} \vec{j}$

$\dot{\vec{p}}_0 = -\dot{\varphi}(\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}) = -\dot{\varphi}\vec{r}_0$

$$\boxed{\dot{\vec{p}}_0 = -\dot{\varphi}\vec{r}_0}$$

Privatni časovi
LaganiniMašinac
065 22 54 100

10



$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ $\quad \vec{r} = \vec{r}(s)$

$S = \overset{\frown}{MM_1}$

$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

$\vec{V} = \dot{s}\frac{d\vec{r}}{ds}$

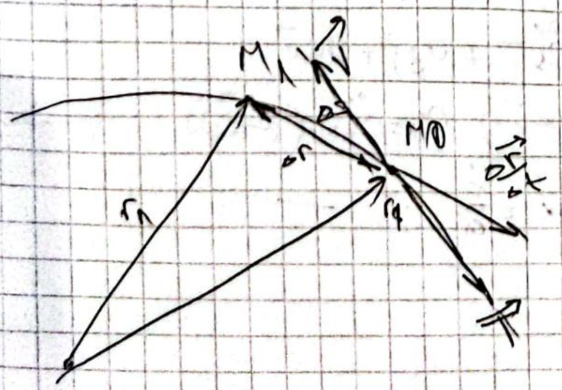
$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| =$ $\quad \Delta r = \overline{MM_1}$ $\quad \Delta s = \overset{\frown}{MM_1}$

$\Delta s \to 0 \quad \overline{MM_1} = \overset{\frown}{MM_1}$

$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\cancel{MM_1}}{\cancel{MM_1}} = 1$

$\Rightarrow \vec{V} = \dot{s}\frac{d\vec{r}}{ds}$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{s}}$$

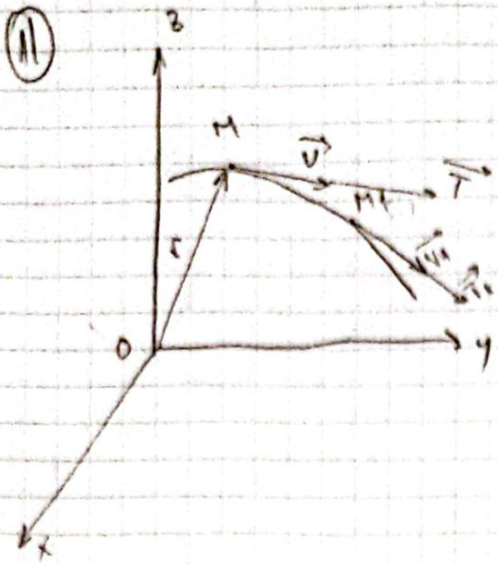


смер $\vec{V}$ је смер кретања тачке
а правац је правац T

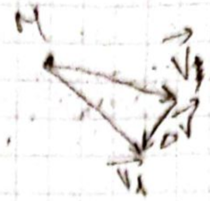
$V_T = \dot{S}$

$S = |S_1 - S_0| + |S_2 - S_1| + \ldots$

11



гледамо векторе

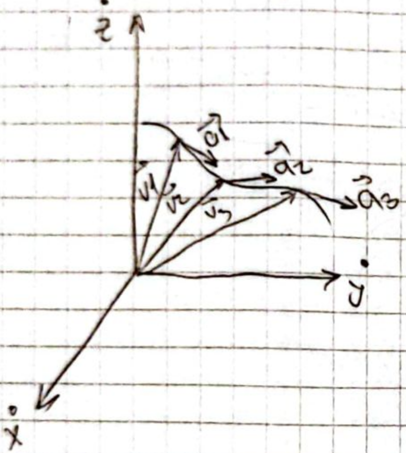


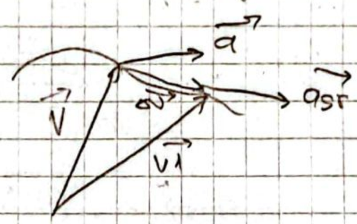
$$\vec v_1 = \vec v + \Delta\vec v \quad , \Delta\vec v = \vec v_1 - \vec v$$
$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\vec a_{sr} = \frac{\Delta\vec v}{\Delta t}$$

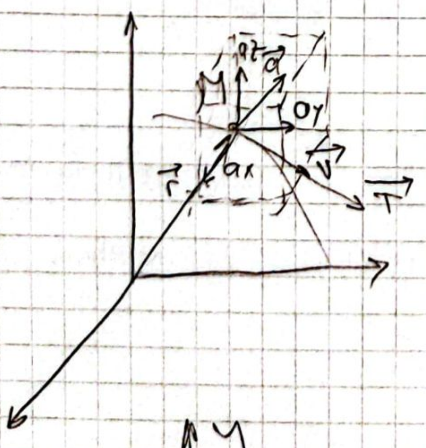
$$\vec a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec v}{\Delta t} = \frac{d\vec v}{dt} = \dot{\vec v} = \ddot{\vec r}$$

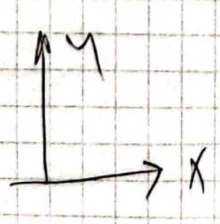
правац убрзања дате тачке је тангента на ходограф брзина тачке.





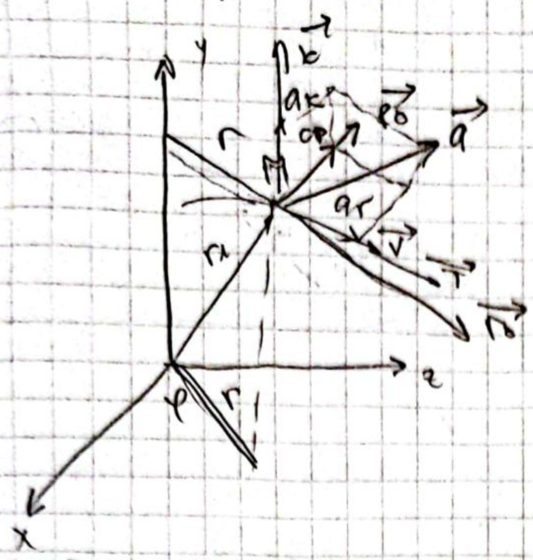
12 У Дек. коорд.





$$\vec a = \ddot{\vec r}$$
$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$$
$$\ddot{\vec r} = \ddot x\vec i + \ddot y\vec j + \ddot z\vec k$$
$$\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k$$
$$a_x = \ddot x \quad , a_y = \ddot y \quad , a_z = \ddot z$$
$$\cos\alpha = \frac{\ddot x}{a} \quad \ldots$$
$$a =$$

(13) U pol. cyun



$\vec{r} = \vec{r}(t)$

$\varphi = \varphi(t)$

$z = z(t)$

$\vec{r} = r\vec{r_0}$

$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r_0} + r\dot{\varphi}\vec{p_0} + \dot{z}\vec{k}$

$\dot{r}\dot{\varphi}\vec{p_0} + r\ddot{\varphi}\vec{p_0}$

$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_\varphi} + \vec{a_z}$

$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{r_0} + \dot{r}\dot{\vec{r_0}} + r\dot{\varphi}\vec{p_0} + r\dot{\varphi}\dot{\vec{p_0}} + \ddot{z}\vec{k}$

$\dot{\vec{r_0}} = \dot{\varphi}\vec{p_0} \qquad \dot{\vec{p_0}} = -\dot{\varphi}\vec{r_0}$

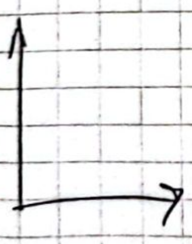
$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{r_0} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{p_0} + \cancel{r\dot{\varphi}\vec{p_0}} + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi})\vec{r_0} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{p_0} + r\ddot{\varphi}\vec{p_0}$

$= \ddot{r}\vec{r_0} - r\dot{\varphi}^2\vec{r_0} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{p_0} + \ddot{z}\vec{k}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ $\qquad \cos\alpha$

$a_p = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$ $\qquad \cos\beta$ $\qquad a$ - - -

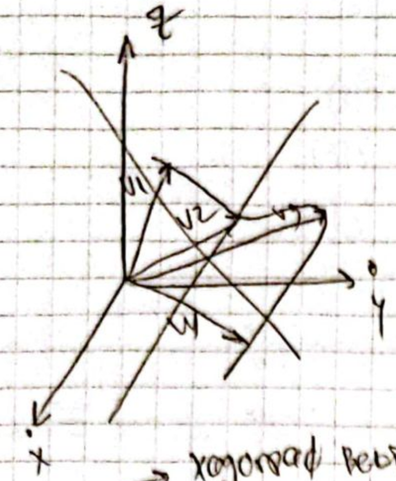
$a_z = \ddot{z}$ $\qquad \cos\gamma$

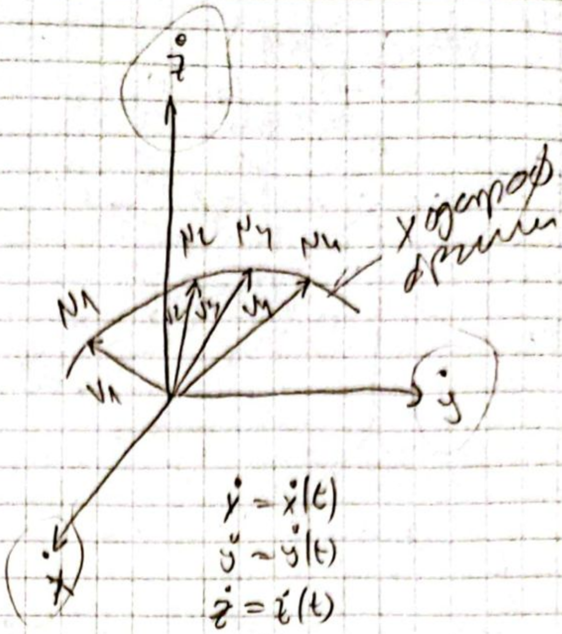


$a_z = 0$

$\longrightarrow$ $\quad a_\varphi = 0,\ a_z = 0 \quad a = a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

14

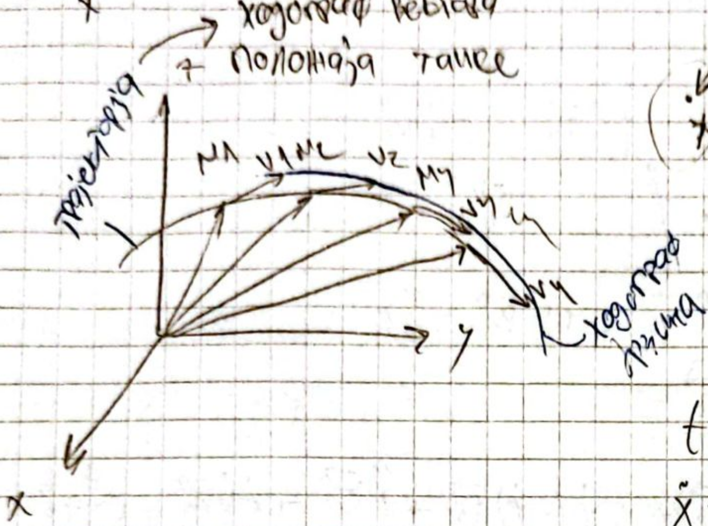




$\dot{y} = \dot{x}(t)$

$\dot{y} = \dot{y}(t)$

$\dot{z} = \dot{z}(t)$



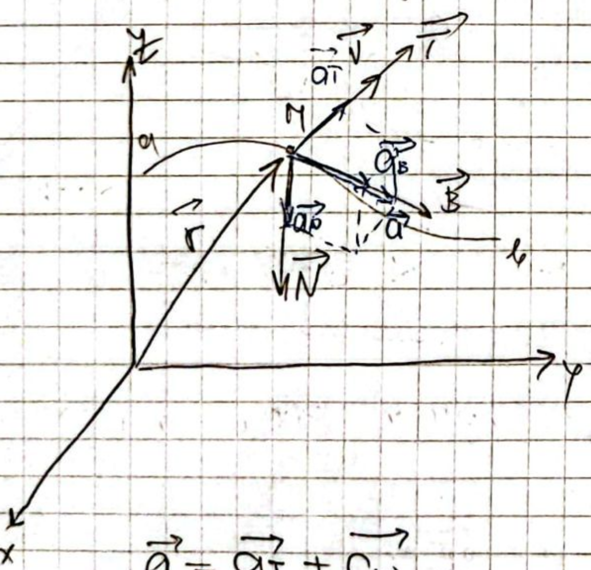
геом место свих крајева вектора брзина тачке

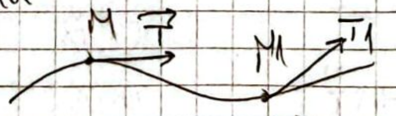
$t = f(\dot{z})$

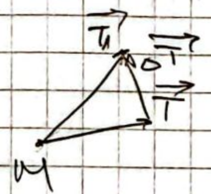
$\dot{x} = \dot{x}(f(\dot{z}))$

$\dot{y} - \dot{x}(\dot{z})$

15 Природни начин одр. убрзања







$\vec{T_1} = \vec{T} + \Delta\vec{T}$

$\vec{a} = \vec{a_T} + \cancel{\vec{a_B}} + \vec{a_N}$ 0

$\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}$

$\vec{a_T} = \dot{\vec{V_T}} = \ddot{S}$

$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = (\vec{V_T}\vec{T})\frac{d}{dt}$

$\vec{a} = \dot{\vec{V_T}}\vec{T} + V_T\dot{\vec{T}}$

$\vec{a} = \ddot{S}\vec{T} + \dot{S}\dot{\vec{T}}$

$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{ds}{ds} = \dot{S}\frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{S}\vec{K}$

$\vec{K} = \frac{1}{\rho_K}\vec{N}$

$\vec{V_T} = \dot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt}\frac{ds}{ds} = \cancel{\frac{ds}{dt}}^{\dot{S}}\frac{d\vec{r}}{ds}$

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \lim\frac{MM_1}{M_1M} = 1$

$\vec{V_T} = \dot{S}$

$\dot{\vec{T}} = \dot{S}\frac{1}{\rho_K}\vec{N}$

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_K}\vec{N}$$

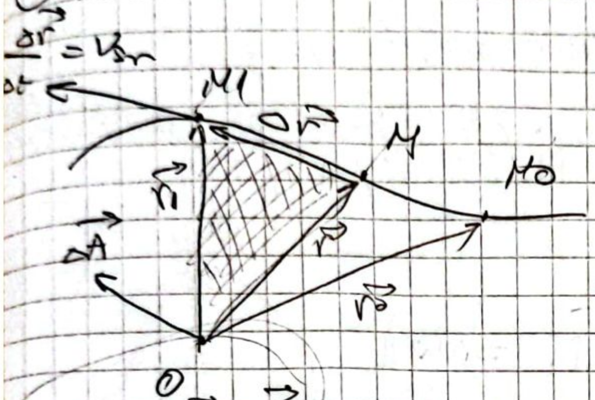
$$\vec{a}_T = \ddot{s}\vec{T}, \quad a_T = \ddot{s}$$

$$\vec{a}_N = \frac{\dot{s}^2}{R_K}\vec{N}, \quad a_N = \frac{\dot{s}^2}{R_K} = \frac{V_T^2}{R_K}$$

$$\vec{a}_B = 0$$

a $\quad\quad$ $\cos\alpha$

(11) Секторска брзина



$$\Delta\vec{A} = \frac{\vec{r}\times\Delta\vec{r}}{2}$$

$$\vec{S}_{sr} = \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$$

$$S = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\vec{r}\times\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ изнесу испред

$$S = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1}{2}\vec{r}\right)\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$S = \frac{1}{2}\vec{r}\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{V}$$

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}$$

$$S_x = (y\dot{z} - z\dot{y})\frac{1}{2}$$

$$S_y = \frac{1}{2}(x\dot{z} - z\dot{x})$$

$$S_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Када се тачка креће у равни Oxy секторска брзина је управна на ту раван $S_x = 0,\ S_y = 0$

$$\vec{S}_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k}$$

$$S_z = \frac{1}{2}(rV\sin\varphi)$$

$$\vec{r}\times\vec{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{r}_0 & \vec{p}_0 & \vec{k}\\ r & 0 & 0\\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\vec{k} = S_z\vec{k}$$

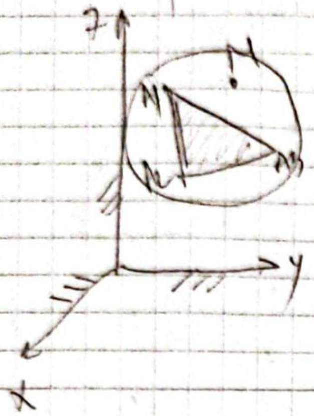
$$S_z = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$$

Privatni časovi
LaganiniMašinac
065 22 54 100

17 Основни појмови кинематике

- Положај тела у прос. је одр. ако је одређене положај свих његове тачке.

Независни параметри који одређују положај тела у односу на који се зову генералисане коор. Број ген. коорд. - број степени слободе



Ако знамо положај тачака A_1, A_2, A_3, онда знамо положај свих тачака тела

$A_1(x_1, y_1, z_1)$ $\qquad$ $A_i(x_i, y_i, z_i)$

$A_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\overline{A_1M}, \overline{A_2M}, \overline{A_3M} = const$$

$$\overline{A_1M}^2 = (x_M - x_1)^2 + (y_M - y_1)^2 + (z_M - z_1)^2$$

$\vdots$

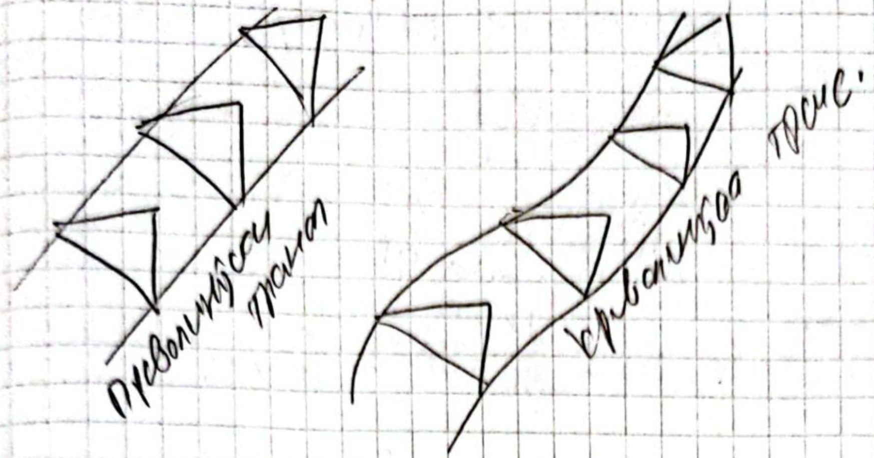
9 коорд. $-$ 3 је $\longrightarrow$ 6 степени слободе кретања

Задаци:

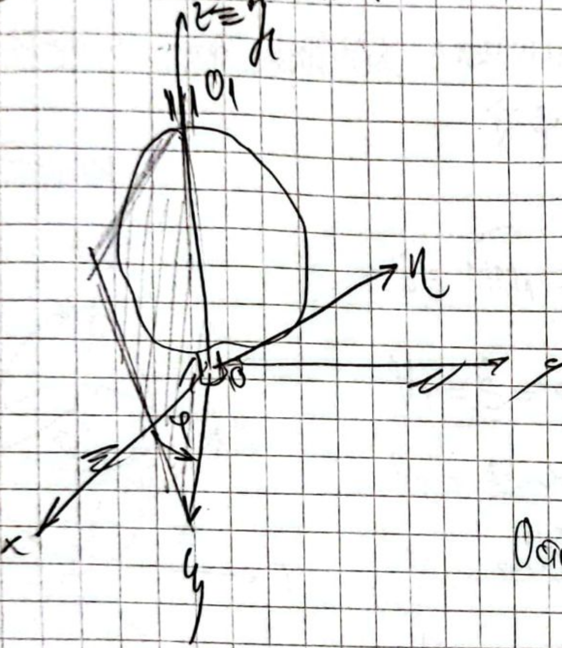
1) одр. кретања у односу на који систем
2) кинемат. карак. тела
3) кретање појединих тачака тела

14) Транслаторно

Ако дуж која спаја две тачке остаје паралелна током кретања



15) Обртање око непокретне осе



Тело врши обртање око неп. осе ако су му 2 тачке током кретања непокретне O_1, O

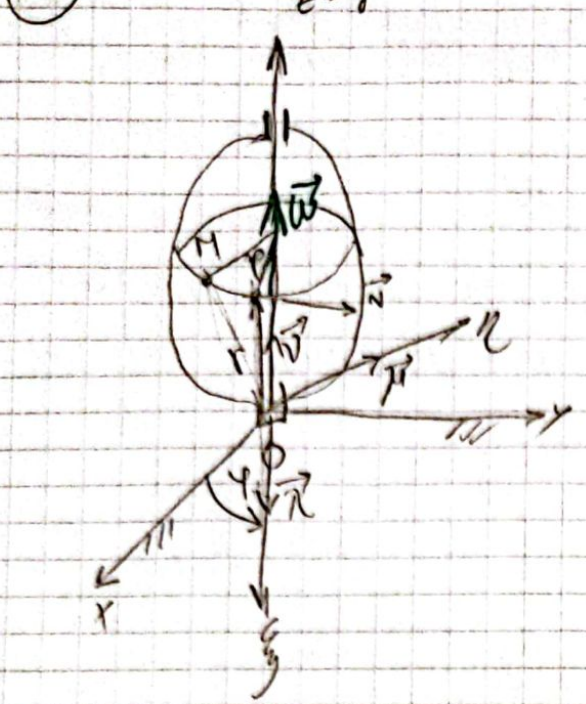
Таква све тачке које спајају те две тачке су непокретне и оне чине осу тела око које се врши рот.

Остале тачке се крећу по кружницама

Тело које се -- " -- има 1 степен слободе кретања - угао φ

Угао обртања

$\varphi = \varphi(t)$ јна обртања око непокр. осе



угаона брзина представља промену угла обртања по времену

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi$$

Има пр. управан на осу на којој се смер обртања види у мат. позитивном смеру

$$\vec\omega = \dot\varphi\vec\nu$$

$$\vec r = \xi\vec\lambda + \eta\vec\mu + \zeta\vec\nu$$

$\xi, \eta, \zeta = const$

$\vec\lambda, \vec\mu, \vec\nu$ вектори

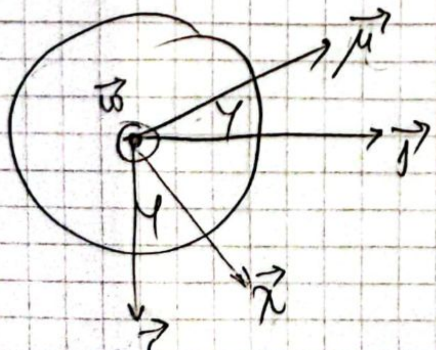
$$\vec v = \dot{\vec r}$$

$$\vec v = \cancel{\dot\xi\vec\lambda} + \xi\dot{\vec\lambda} + \cancel{\dot\eta\vec\mu} + \eta\dot{\vec\mu} + \cancel{\dot\zeta\vec\nu} + \zeta\dot{\vec\nu}$$

$$\vec v = \xi\dot{\vec\lambda} + \eta\dot{\vec\mu} + \cancel{\zeta\dot{\vec\nu}}$$

$$\vec\nu = const \Rightarrow \zeta\dot{\vec\nu} = 0$$

$$\vec v = \xi\dot{\vec\lambda} + \eta\dot{\vec\mu} \Rightarrow \vec v = \xi\dot\varphi\vec\mu + \eta(-\dot\varphi)\vec\lambda$$



$$\vec\lambda = \cos\varphi\,\vec i + \sin\varphi\,\vec j$$

$$\vec\mu = -\sin\varphi\,\vec i + \cos\varphi\,\vec j$$

$$\dot{\vec\lambda} = -\sin\varphi\cdot\dot\varphi\,\vec i + \cos\varphi\cdot\dot\varphi\,\vec j$$

$$\boxed{\dot{\vec\lambda} = \dot\varphi\vec\mu}$$

$$\dot{\vec\mu} = -\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec i - \sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec j$$

$$\boxed{\dot{\vec\mu} = -\dot\varphi\vec\lambda}$$

$$\vec{\lambda} \times \vec{\mu} = \vec{\nu} \qquad \dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi}\vec{\mu} \Rightarrow \vec{\mu} = \frac{\dot{\vec{\lambda}}}{\dot{\varphi}}$$

$$\vec{\nu} \times \vec{\lambda} = \vec{\mu} \qquad \dot{\vec{\mu}} = -\dot{\varphi}\vec{\lambda} \rightarrow \vec{\lambda} = -\frac{\dot{\vec{\mu}}}{\dot{\varphi}}$$

$$\vec{\mu} \times \vec{\nu} = \vec{\lambda} \qquad \dot{\vec{\mu}} = \dot{\varphi}(\vec{\lambda} \times \vec{\nu})$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi}(\vec{\mu} \times \vec{\nu})$$

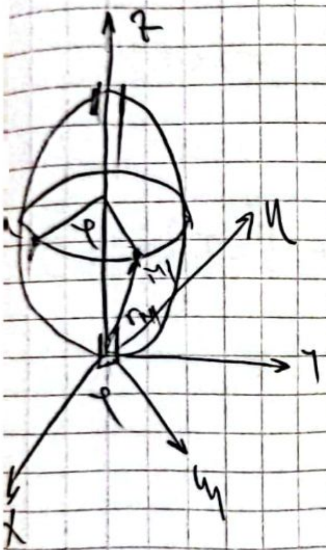
$$\dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi}\vec{\mu} \times \vec{\omega}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}_M = \dot{\varphi}\vec{\nu} \times (\xi_M\vec{\lambda} + \eta_M\vec{\mu} + \zeta_M\vec{\nu})$$

$$\vec{\omega} = \omega_\xi\vec{\lambda} + \omega_\eta\vec{\mu} + \omega_\zeta\vec{\nu}$$

кајиве око неп. осе $\rightarrow \vec{\omega} = \omega_z\vec{\nu}$

x Брзина



$$S = \overset{\frown}{MM_1} = R\varphi(t)$$

$$V_T = \dot{S} = R\dot{\varphi}$$

$$V_T = R\omega_z$$

$$V_M = R\omega$$

$$V_M = \omega r_M \sin\measuredangle(\vec{\omega}, \vec{r}_M)$$

(21) Угаоно убрзање

Промена угаоне брзине која се врши у јед. вр.

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \Rightarrow \frac{d\frac{d\varphi}{dt}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

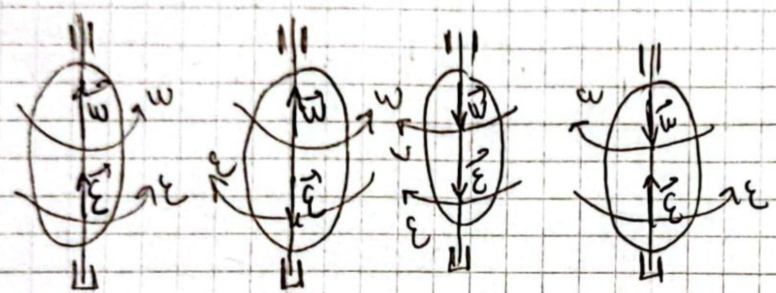
$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$$

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{\nu} = \dot{\omega}\vec{\nu}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_{\xi}\vec{\lambda} + \varepsilon_{\eta}\vec{\mu} + \varepsilon_{\zeta}\vec{\nu}$$

сто вен сее

$$\rightarrow \vec{\varepsilon} = \varepsilon_z\vec{\nu}$$



убрзање

$$\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}$$

$$S = R\varphi(t)$$

$$\ddot{s} = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon_z$$

$$a_T = \dot{V}_T = \ddot{S} = R\varepsilon_z$$

$$\dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

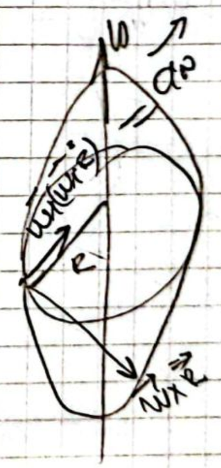
$$|a_T| = R\varepsilon$$

$$a_N = \frac{V^2}{R_K} = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R}$$

$$a_N = R\omega^2$$

$$\vec{a_T} = \vec{\varepsilon} \times R$$

$$\vec{a_N} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times R)$$



$$\vec{a} = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\varepsilon^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

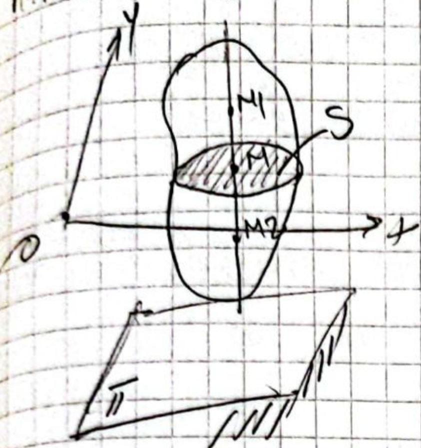
$$\vec{V_M} = \vec{\omega} \times \vec{r_M}$$

$$\vec{a_M} = \dot{\vec{V_M}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r_M} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r_M}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r_M} + \vec{\omega} \times \vec{V_M}$$

$$\Rightarrow \vec{\varepsilon} \times \vec{r_M} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_M})$$

22 Равно кретање

Да се тело креће тако да све његове тачке остају у равни паралелној некој непокретној равни



Такође све тачке које се налазе на правој управној на равни кретања врше транслаторно кретање

Све тачке имају исте трајекторије, брзине и убрзања, тако да је за познавање трансл. кретања довољно познавати само 1 тачку

S - раван пресек

$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$

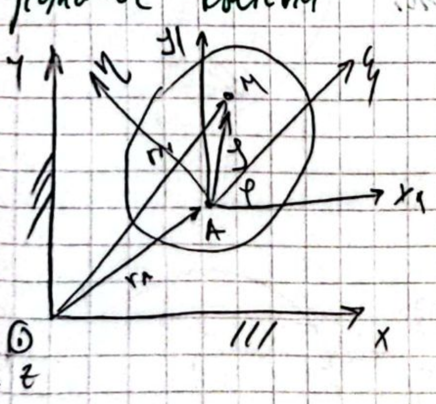
$\overline{AB} = const$

$\overline{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

4 параметра, а знамо једну једн

$4 - 1 = 3$ степени слободе

Једначине кретања



Уведимо коо сист. Ax_1y_1 у тачки A

ако познајемо положај Ax_1y_1 у односу на Oxy

онда знамо и положај M у односу на Oxy

$x_A = x_A(t)$

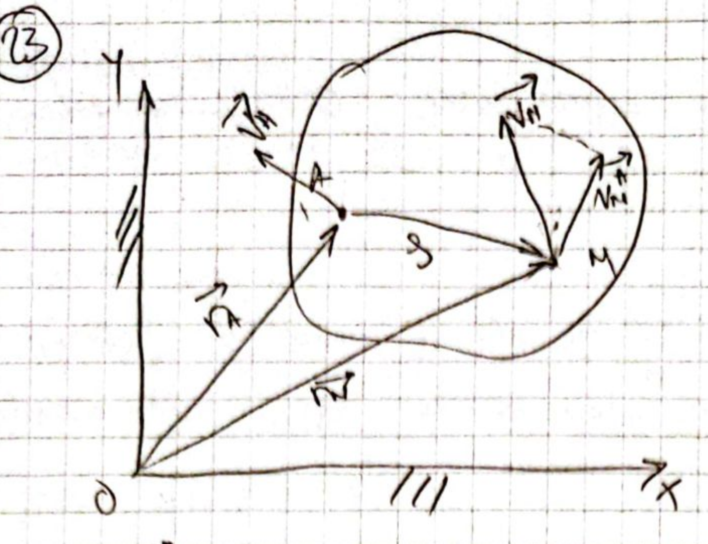
$y_A = y_A(t)$

$\varphi = \varphi(t)$

ово морамо да знамо да би знали положај тела у односу на Oxyz

Положај Ox_1y_1 у односу на Oxy и положај $O\xi\eta$ у односу на Ox_1y_1, а онда знамо и $O\xi\eta$ у односу на Ox_1y_1 ако познајемо $\varphi = \varphi(t)$

(23)



$\vec{V}_A = \dot{\vec{r}}_A$

$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}$

$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\rho}} = \vec{V}_A + \vec{V}_M^A$

$\vec{\rho} = \rho\vec{\rho}_0$

$\dot{\vec{\rho}} = \cancel{\dot{\rho}\vec{\rho}_0} + \rho\dot{\vec{\rho}}_0$

$\dot{\vec{\rho}} = \rho\dot{\vec{\rho}}_0$ $\quad \dot{\vec{\rho}}_0 = \vec{\omega}\times\vec{\rho}$

$\dot{\vec{\rho}} = \rho(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$

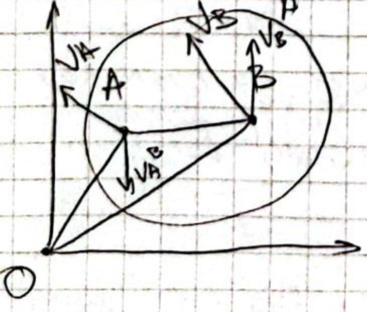
$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega}\times\vec{\rho} = \vec{\omega}\times\vec{AM} = \vec{V}_M^A$

$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_A + \rho\dot{\vec{\rho}}_0 = \dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega}\times\vec{\rho} = \vec{V}_A + \vec{V}_N^A$

(24)

независност ω и ε од избора пола трансл.

$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \varepsilon_z\vec{\gamma} = \ddot{\varphi}\vec{\gamma} = \ddot{\varphi}\vec{\nu}$



$$\left.\begin{aligned}\vec{V}_A &= \vec{V}_B + \vec{V}_A^B\\ \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_B^A\end{aligned}\right\} +$$

$\cancel{\vec{V}_A + \vec{V}_B} = \cancel{\vec{V}_A + \vec{V}_B} + \vec{V}_A^B + \vec{V}_B^A$

$\vec{V}_A^B + \vec{V}_B^A = 0$

$\vec{V}_A^B = -\vec{V}_B^A$

$\vec{\omega}\times\vec{AB} = -(\vec{\omega}\times\vec{BA})$

$\vec{\omega}\times\vec{AB} = \vec{\omega}\times\vec{AB}$

$$\vec{w}_1 \times \vec{AB} + \vec{w}_2 \times \vec{BA} = 0$$

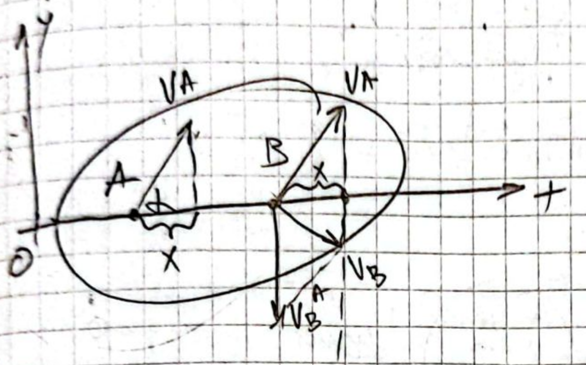
$$(\vec{w}_1 - \vec{w}_2) \times \vec{AB} = 0$$

$$\vec{w}_1 - \vec{w}_2 = 0$$

$$\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{w}$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \dot{\vec{w}}_1 = \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\varepsilon}$$

(20) Т: Пројекције брзина тачака тела где брзине једно растојање на линије



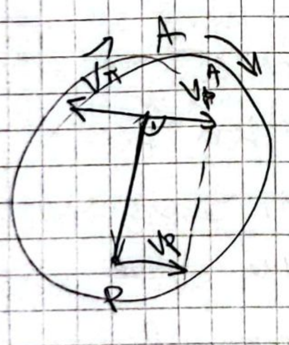
$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \cancel{\vec{V}_B^A}$ 0

зато што је $V_B^A \perp 0x$

x: $V_{Bx} = V_{Ax} + 0$

(21) Тренутни пол брзина

Ако при кретању тела $\omega \neq 0$ тада постоји само 1 тачка чија је $V=0$ и назива се тренутни пол брзина P



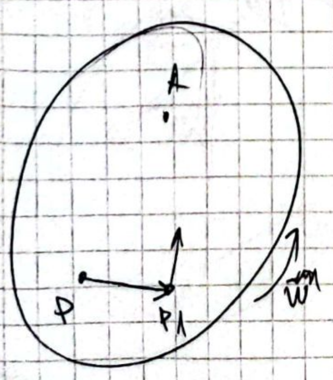
$\cancel{\vec{V}_P} = \vec{V}_A + \vec{V}_P^A$ 0

$\vec{V}_A = -\vec{V}_P^A$

$\vec{V}_P^A = \vec{w} \times \vec{AP}$

$V_A = V_P^A = w \cdot \overline{AP}$ $\overline{AP} = \dfrac{V_A}{w}$

$\vec{V}_A^P = \vec{w} \times \vec{PA}$



$\vec{V}_{P_1} = \cancel{\vec{V}_P} + \vec{V}_{P_1}^P$ 0

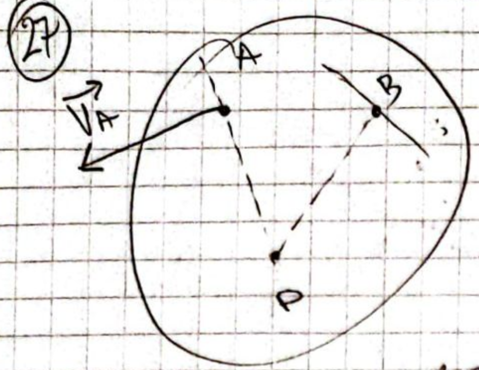
$\vec{V}_{P_1} = \vec{V}_{P_1}^P$

$0 = \vec{w} \times \vec{P_1P}$

$\vec{w} \neq 0 \Rightarrow \vec{P_1P} = 0 \Rightarrow P_1 = P$

постоји само 1 тачка чија је $V=0$

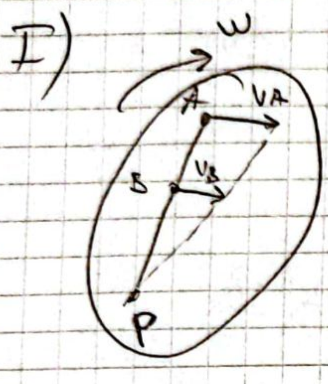
(27)



Ако знамо $\vec{V}$ пол пр. и правац брзине A, онда знамо и правац брзине B, што је све одређено следом $\vec{\omega}$

Тренутни пол брзина се налази у пресеку нормала брзина двеју тачака

I)

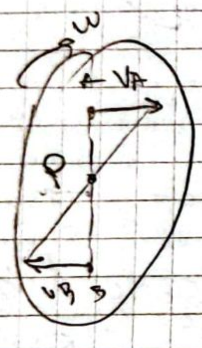


$\omega_A = \omega_B = \omega$

$V_A = \omega \cdot AP$

$V_B = \omega \cdot BP$

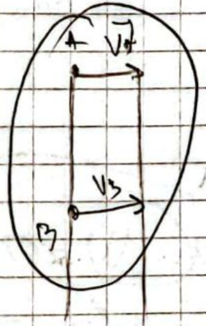
$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}$



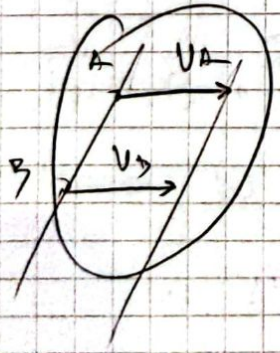
$\omega_A = \omega_B = \omega$

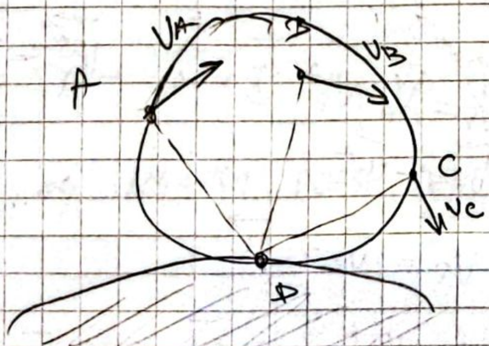
V_A

V_B



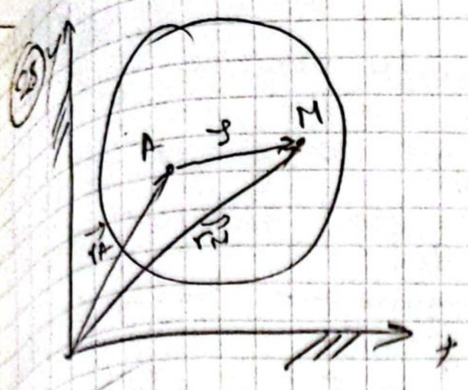
Нема пола, тело врши тренутно транслаторно кретање





Ако се тело креће по неком непокр. пов, у додирној тачки $V=0$, ту тачку P сматрамо (као трен. пол. брзина)

(28)



$\vec r_M = \vec r_A + \vec\rho$

$\dot{\vec r}_M = \vec v_M = \dot{\vec r}_A + \dot{\vec\rho}$

$= \vec v_A + \vec\omega\times\vec\rho = \vec v_A + \vec v_M^A$

$\vec v_M^A = \vec\omega\times\vec\rho$

$\vec a_M = \dot{\vec v}_M = \dot{\vec v}_A + \dot{\vec v}_M^A = \vec a_A + \vec a_M^A$

$\vec v_A = \vec\omega\times\vec r_A$

$\vec v_A = \vec\omega\times\overline{OA}$

$\vec a_A = \dot{\vec v}_A = \dot{\vec\omega}\times\vec r_A + \vec\omega\times\dot{\vec r}_A =$

$= \vec\varepsilon\times\vec r_A + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{OA})$

$\vec a_A = \vec a_{AN} + \vec a_{AT}$

$a_{AN} = \omega^2\overline{OA}$, $\vec a_{AN} = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{OA})$

$a_{AT} = \varepsilon\,\overline{OA}$, $\vec a_{AT} = \vec\varepsilon\times\vec{OA}$

$\vec a_M^A = \dot{\vec v}_M^A = \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + \vec\omega\times\dot{\vec\rho}$

$= \vec\varepsilon\times\vec{AM} + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{AM})$

$a_{MT}^A = \varepsilon\cdot AM$, $\vec a_{MT}^A = \vec\varepsilon\times\vec{AM}$

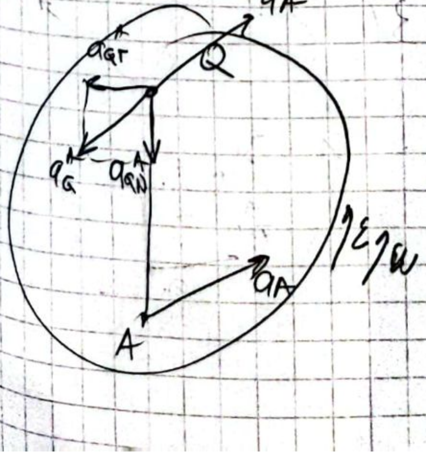
$a_{MN}^A = \omega^2 AM$, $\vec a_{MN}^A = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{AM})$

(29) Трен пол убрзања Q, само 1 тачка има П

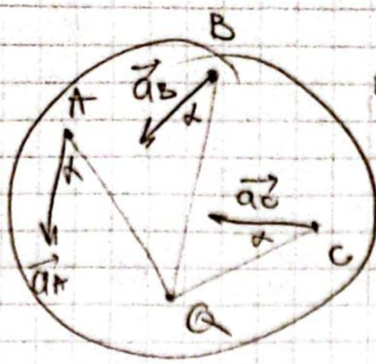
$\omega, \varepsilon \neq 0$ убрзање $=0$, тренутни пол убрзања

$\vec a_Q = \vec a_A + \vec a_Q^A$

$\vec a_A = -\vec a_Q^A$



(30)



ε, ω

$a_{AN} = \overline{AQ}\cdot\varepsilon$

$a_{AT} = \overline{AQ}\,\omega^2$

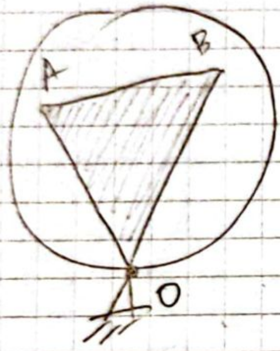
$a_A^2 = a_{AN}^2 + a_{AT}^2$

$a_A = \overline{AQ}\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$

$a_B = \overline{BQ}\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$

(31) Сферно кретање – обртање око непокр. тачке

Положај, тело одређен са 3 његове тачке

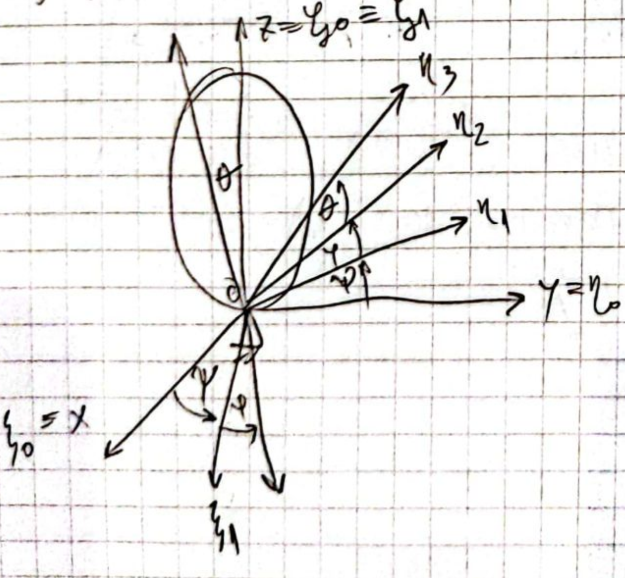


A(x,y,z)
B(x,y,z) } 6 непознатих
O(x,y,z)

$\overline{AB}, \overline{BO}, \overline{OA}$ = const – 3 граничне

6-3 = 3 степена слободе кретања

Ојлеров поступак – користимо покретни коор систем $O\xi\eta\zeta$



1) прво обрнемо $O\xi\eta\zeta$ око z осе у негативном за угао ψ
угао прецесије $O_{\xi_0\eta_0\zeta_0} \to O_{\xi_1\eta_1\zeta_1}$

2) обртање око ξ осе за угао θ, $O_{\xi_1\eta_1\zeta_1} \rightarrow O_{\xi_2\eta_2\zeta_2}$

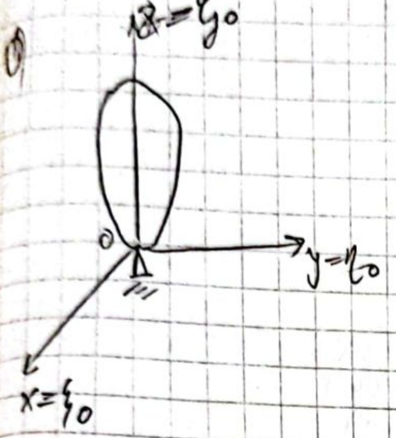
за угао θ - угао нутације

3) обртање око ζ осе за угао φ, $O_{\xi_2\eta_2\zeta_2} \rightarrow O_{\xi_3\eta_3\zeta_3}$

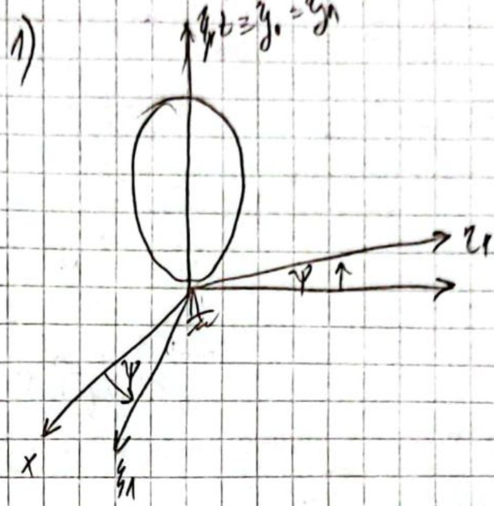
угао сопствене ротације

* На тај начин се добија произвољни положај тог система $O_{\xi\eta\zeta}$

0)



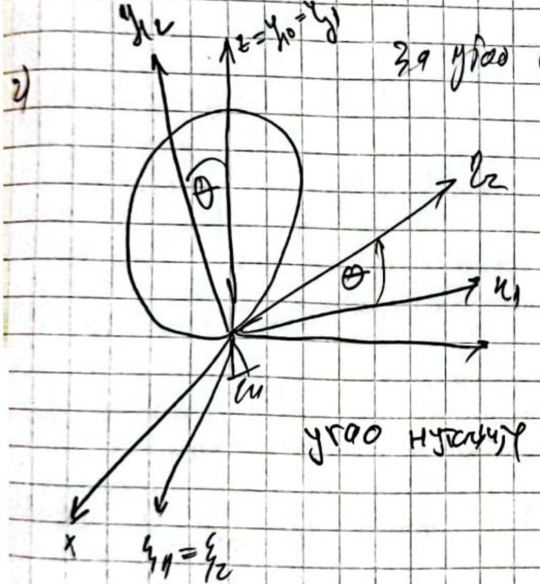
1)



за угао ψ

угао прецесије

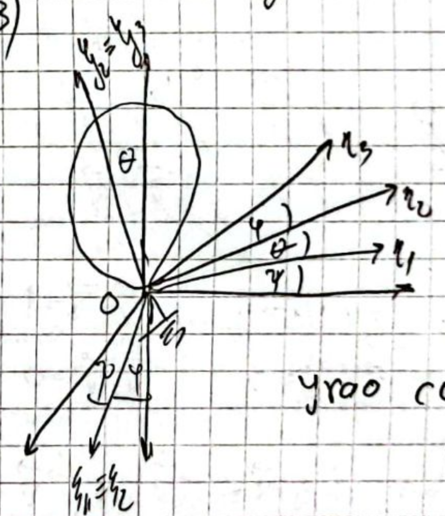
2)



за угао θ

угао нутације

3)

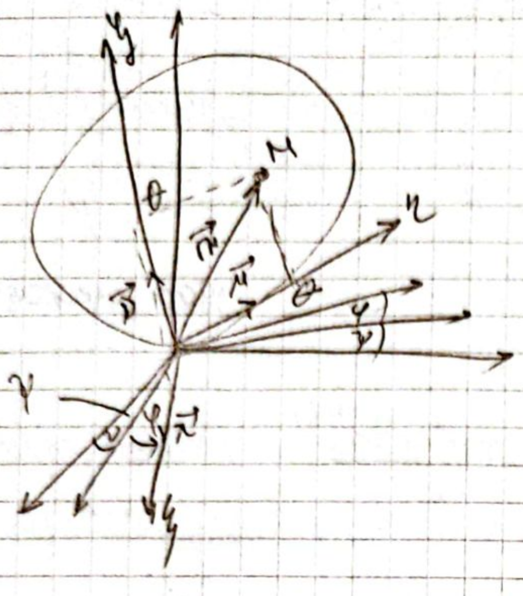


за угао φ

угао сопствене ротације

(32) $\vec{V}$ при сферном кретању

израчунава се преко вектора $\vec{r}_M$ у кос сист $O\xi\eta\zeta$



$$\vec{r}_M = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu} \quad , \xi,\eta,\zeta = const$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}}_M = \xi\dot{\vec{\lambda}} + \eta\dot{\vec{\mu}} + \zeta\dot{\vec{\nu}}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{V}_\xi \cdot \vec{\lambda}$$
$$\dot{\vec{\mu}} = \vec{V}_\eta \cdot \vec{\mu}$$
$$\dot{\vec{\nu}} = \vec{V}_\zeta \cdot \mu$$

$$\vec{V} = V_\xi\vec{\lambda} + V_\eta\vec{\mu} + V_\zeta\vec{\nu}$$

$$\vec{V} = (\vec{V}\cdot\vec{\lambda})\vec{\lambda} + (\vec{V}\cdot\vec{\mu})\vec{\mu} + (\vec{V}\cdot\vec{\nu})\vec{\nu}$$

$$\vec{V} = (\cancel{\xi\dot{\vec{\lambda}}\vec{\lambda}}^{\,0} + \eta\dot{\vec{\mu}}\lambda + \zeta\dot{\vec{\nu}}\vec{\lambda})\vec{\lambda} +$$
$$+ (\xi\dot{\vec{\lambda}}\vec{\mu} + \cancel{\eta\dot{\vec{\mu}}\vec{\mu}}^{\,0} + \zeta\dot{\vec{\nu}}\vec{\mu})\vec{\mu} +$$
$$+ (\xi\dot{\vec{\lambda}}\vec{\nu} + \eta\dot{\vec{\mu}}\vec{\nu} + \cancel{\zeta\dot{\vec{\nu}}\vec{\nu}}^{\,0})\vec{\nu}$$

$$\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda} = 1 \qquad \vec{\mu}\cdot\vec{\mu} = 1 \qquad \vec{\nu}\cdot\vec{\nu} = 1$$
$$\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu} = 0 \qquad \vec{\lambda}\cdot\vec{\nu} = 0 \qquad \vec{\mu}\cdot\vec{\nu} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \quad \dot{\vec{\lambda}}\vec{\mu} + \lambda\dot{\vec{\mu}} = 0 \qquad \dot{\vec{\lambda}}\vec{\nu} = -\vec{\lambda}\dot{\vec{\nu}} \qquad \dot{\vec{\mu}}\vec{\nu} = -\vec{\mu}\dot{\vec{\nu}}$$
$$\dot{\vec{\lambda}}\vec{\mu} = -\lambda\dot{\vec{\mu}}$$

уврсто

$$\vec{V} = (-\dot{\vec{\lambda}}\mu\cdot\eta + \zeta\dot{\vec{\nu}}\vec{\lambda})\lambda +$$
$$+ (\xi\dot{\vec{\lambda}}\vec{\mu} - \dot{\vec{\mu}}\vec{\nu}\zeta)\vec{\mu} +$$
$$+ (\eta\dot{\vec{\mu}}\vec{\nu} - \xi\dot{\vec{\nu}}\vec{\lambda})\vec{\nu}$$

ако уведемо $\dot{\vec{\nu}}\cdot\vec{\lambda} = \omega_\eta$

$$\dot{\vec{\lambda}}\vec{\mu} = \omega_\zeta$$
$$\dot{\vec{\mu}}\cdot\vec{\nu} = \omega_\xi$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} \qquad \vec{\omega} = \omega_\xi\vec{\lambda} + \omega_\eta\vec{\mu} + \omega_\zeta\vec{\nu}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{\nu} \\ \vec{r} &= \xi \vec{\lambda} + \eta \vec{\mu} + \zeta \vec{\nu} \end{aligned}$$

Израз је идентичан као израз за обртање тела око непокретне осе пошто се доби $= 0$

$$\omega_\eta \zeta - \eta \omega_\zeta = 0 \qquad \omega_\xi \zeta = \omega_\zeta \xi \qquad \omega_\xi \eta = \omega_\eta \xi$$

$$\omega_\eta \zeta = \eta \omega_\zeta$$

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta} \text{ – једначина праве}$$

Представља тренутну осу обртања и све држи $= 0$

Угаона брзина када има непокретну тачку $\omega \neq \frac{d}{dt}(\varphi)$

није $= \dot{\varphi}$

(33) Ојлерове ре

$$\psi = \psi(t) \qquad \theta = \theta(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$$

$$\omega_{\psi sr} = \frac{\Delta\psi}{\Delta t} \qquad \omega_{\theta sr} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \omega_{\varphi sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$\omega_p = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{d\psi}{dt}$ – угаона брзина прецесије $= \dot{\psi}$, $\vec{\omega}_p = \dot{\psi}\vec{\zeta}$

$\omega_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$ – угаона брзина нутације $= \dot{\theta}$, $\omega_n = \dot{\theta}\vec{n}$

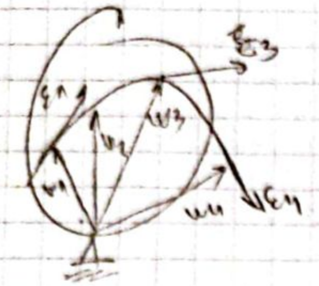
$\omega_{sr} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$ – угаона бр. тренутне ротације $= \dot{\varphi}$, $\omega_{sr} = \dot{\varphi}\vec{\nu}$

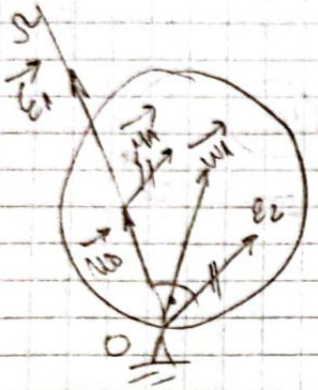
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_{sr} = \dot{\psi}\vec{\zeta} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{\nu}$$

(34) Тренутна угаона убрзање

$$\vec{\varepsilon}_{sr} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$$

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$$ И, што брже тачке по ходографу угаоне брзине





$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\omega}_0$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\,\vec{\omega}_0 + \omega \cdot \dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{\varepsilon}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$

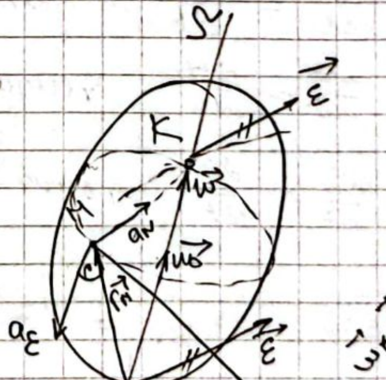
$$\vec{u}_1 = \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_0$$

$\vec{\omega}_1$ угаона брзина обртања вектора $\vec{\omega}_0$

$$\dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = \omega(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0) = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_1$$

(35) Убрзање тачке



$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

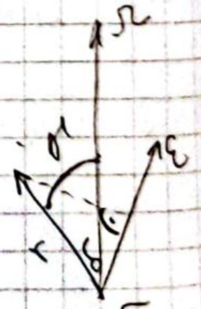
$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$$

$a_\varepsilon \neq a_T$ — тангенц. убрзање

обртно убрзање

$$\vec{a}_\varepsilon \perp \vec{r}$$

$$a_\varepsilon = \varepsilon r \sin \angle(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon r \sin \delta$$



$\angle(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \delta$

$$a_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) \times \vec{r} = \dot{\omega}\vec{\omega}_0 \times \vec{r} + \omega \cdot \dot{\vec{\omega}}_0 \times \vec{r}$$

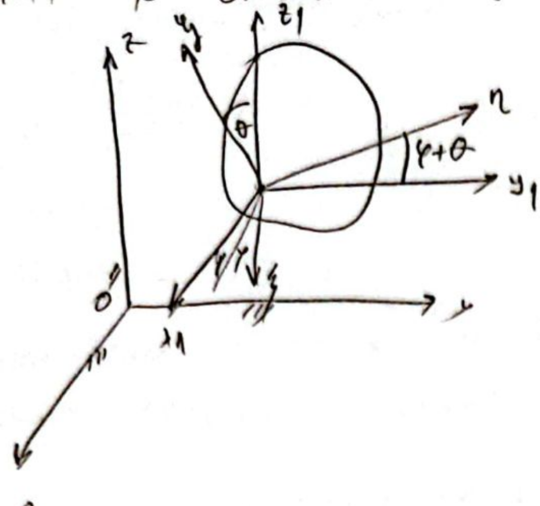
$$a_\varepsilon = \dot{\omega}\vec{\omega}_0 \times r + \omega(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0) \times \vec{r} = \vec{a}_{\varepsilon 1} + \vec{a}_{\varepsilon 2}$$

$\sin 90° = 1$ $\quad r_M = r \sin \gamma$

$a_{\varepsilon 1} = \varepsilon_1 r \sin \angle(\vec{\varepsilon}_1, \vec{r})$, $a_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 r \sin \angle(\vec{\varepsilon}_2, \vec{r})$, $a_\omega = \omega v \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{v}) = \omega^2 r_M$

– слободно кретање тела, заузима произвољан положај

– има 6 степени слободе кретања



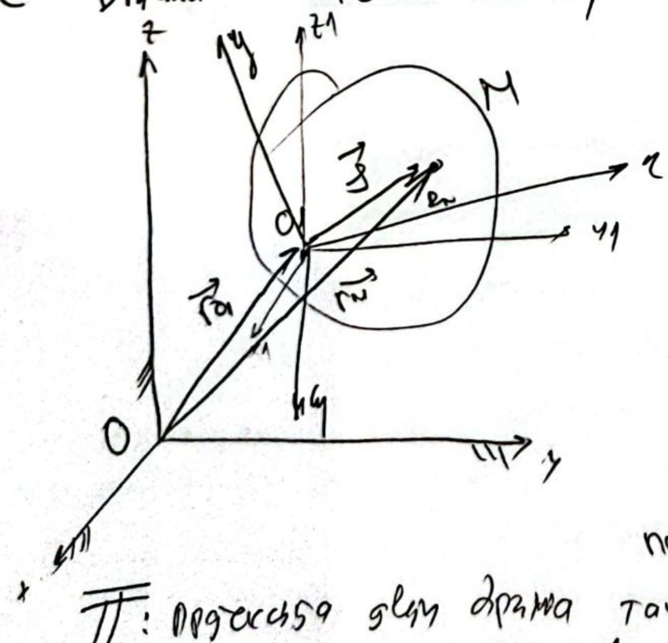
раст. q од дек. коо $Oxyz$ круто везани дек. коо. $O_1x_1y_1z_1$ покретни коо сист. $O_1\xi\eta\zeta$

За би познавали кретање тела, морамо да познајемо кретање коо сист $O_1\xi\eta\zeta$ у односу на $Oxyz$, помоћу ј-на $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$ знамо кретање $O_1\xi\eta\zeta$ у односу на $O_1x_1y_1z_1$, док је положај $O_1x_1y_1z_1$ одређен ј-нама $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ што представља коорд. тачке O_1 у $Oxyz$ систему

$$\left.\begin{array}{ll}\psi=f_1(t) & x_{O1}=f_4(t)\\ \varphi=f_2(t) & y_{O1}=f_5(t)\\ \theta=f_3(t) & z_{O1}=f_6(t)\end{array}\right\}$$ ј-не кретања слободног тела

Privatni časovi
LaganiniMašinac
065 22 54 100

(37) Брзина – општем кретању



$$\vec{r}_M=\vec{r}_{O1}+\vec{\rho}$$

$$\vec{V}_M=\dot{\vec{r}}_M=\dot{\vec{r}}_{O1}+\dot{\vec{\rho}}$$

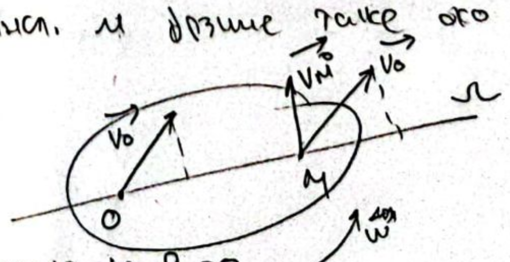
$$\dot{\vec{r}}_{O1}=\vec{V}_{O1}=\dot{x}_{O1}\vec{i}+\dot{y}_{O1}\vec{j}+\dot{z}_{O1}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{\rho}}=\vec{V}_M^{O1}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

$$\vec{V}_M=\vec{V}_{O1}+\vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

брз. произв. тачке тела = збиру брзине произв. пола трансл. и брзине тачке око тог пола ор.

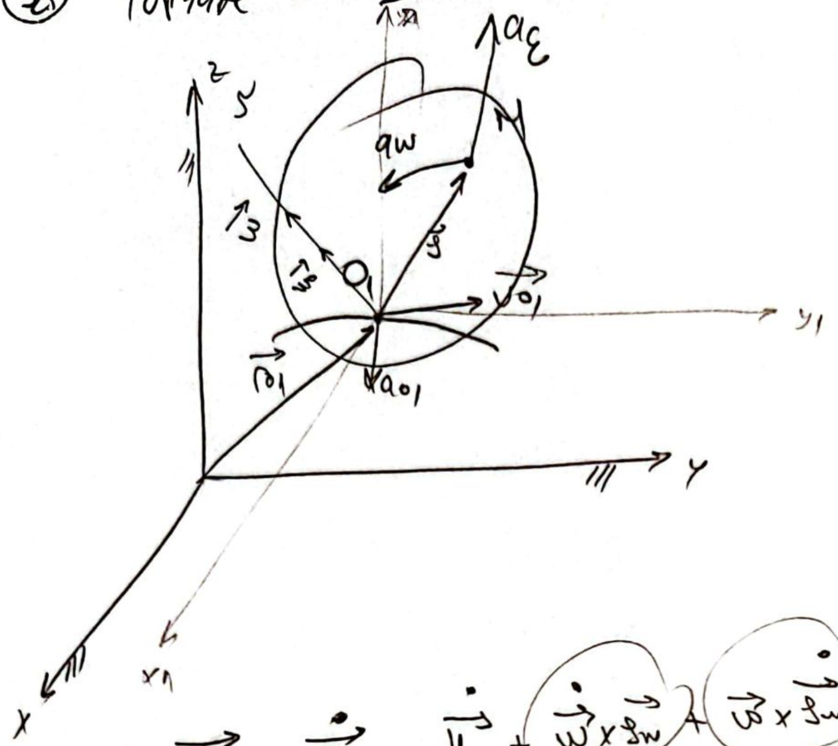
Т: Пројекција брзина тачака које се налазе на истој правој су једнаке



$\vec{V}_M^O$ пројекција на $\Omega=0$

$$\vec{V}_M=\vec{V}_O+\vec{V}_M^O \Rightarrow V_{M\Omega}=V_{O\Omega}$$

38) Убрзање – опште кретање



$$a = a_\varepsilon + a_\omega$$

$$a_\varepsilon = \varepsilon \times \rho$$

$$\dot{\omega} \times \rho$$

$$a_\omega = \omega \times \omega \times \rho$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_M) = a_\omega$$

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{V}}_M = \dot{\vec{V}}_{O1} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_M$$

$$\to \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M}_{a_\varepsilon}$$

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\rho}} \to \omega \times \rho_M$$

$$\vec{V}_0 + \vec{V}_M$$

$$V_M = \ddot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_M$$

V

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{V}}_{O1} + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega \quad \vec{a}_M^{O1}$$

$$= \vec{a}_{O1} + \vec{a}_{O1}^{M}$$

Сложено кретање тачке

релативно, преносно, апсолутно

када се тачка M креће по телу

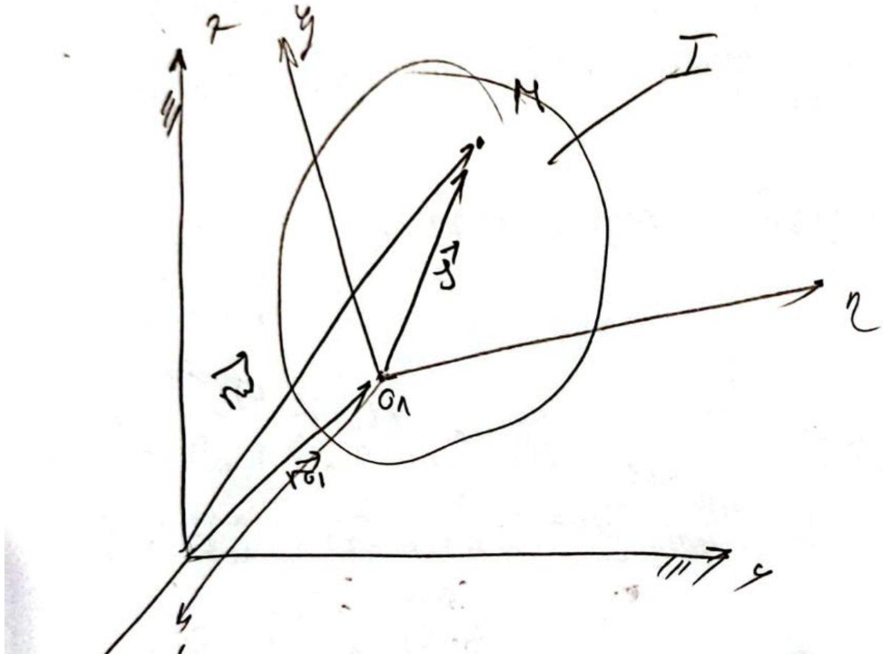
кретање тачке M у односу на непокретни коо Oxyz

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Брзина тела у односу на коо систем Oxyz → апсолутна брзина односно убрзање

Брзина тела у односу на покретни коо сист $O_1\xi\eta\zeta$ → релативно кретање брзина / убрзање



Кретање тачке тела I које се у датом тренутку поклапа тачка M назива се преносно кретање

Преносна брзина и убрзање – брз/убрз тела које се поклапа са брз/убрз тачке M

Елиминацијом времена из ј-на апс. кретања $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, → апсолутна путања тачке

Положај / кретање тачке M у односу на $O_1\xi\eta\zeta$ → релативна путања

(40) Брзина — ~~[illegible]~~ сложено кр.

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}$$

$$\vec{r}_{O_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{\rho} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}$$

$$\vec{V}_a = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_{O_1} + \dot{\vec{\rho}}$$

$$\dot{\vec{r}}_{O_1} = \vec{V}_{O_1}$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \underbrace{\dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\zeta}\vec{\nu}}_{\text{представља брзину тачке у односу на } O\xi\eta\zeta} + \xi\dot{\vec{\lambda}} + \eta\dot{\vec{\mu}} + \zeta\dot{\vec{\nu}}$$

представља кретање тачке у односу на Oxyz и заједно са V_{O_1} чини $= V_p$ = преносна брзина

$= V_r$ = релативна брзина

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{V}_r$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{V}_r + \xi\dot{\vec{\lambda}} + \eta\dot{\vec{\mu}} + \zeta\dot{\vec{\nu}}$$

$$\vec{V}_r = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\zeta}\vec{\nu}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega} \times \vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}, \quad \dot{\vec{\nu}} = \vec{\omega} \times \vec{\nu}$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu})$$

$$\dot{\vec{\rho}} = V_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

апсолутна брз.

$$\underline{\vec{V}_p = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$$ — кретање тачке M у односу на Oxyz

$$\vec{V}_a = \vec{V}_p + \vec{V}_r$$

а) раво кретање

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_M^{O_1}$$

б) обрт око непокр. тачке

$$\vec{V}_p = \cancel{\vec{V}_{O_1}}^{0} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_N^{O_1}$$

в) обрт око непок. осе

$$\vec{V}_p = \omega_z \vec{k} \times \vec{\rho}$$

г) транслаторно кретање $\omega = 0$

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{O_1}$$

Задатак

$\vec{a} = \dot{\vec{V}}$

$\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{V}_r = \vec{V}_{O1} + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

$\vec{a} = \dot{\vec{V}}_{O1} + \dot{\vec{V}}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}$

$\vec{a} = \vec{a}_{O1} + \dot{\vec{V}}_r + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$

$\dot{\vec{V}}_{O1} = \vec{a}_{O1}$

$\dot{\vec{V}}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r$

$\vec{V}_r = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\zeta}\vec{\nu}$

$\vec{a}_r = \dot{\vec{V}}_r = \ddot{\xi}\vec{\lambda} + \ddot{\eta}\vec{\mu} + \ddot{\zeta}\vec{\nu}$

$\vec{a}_p = \vec{a}_{O1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{a}_{O1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{V}_M''$

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p$

убрзање тела које врши опште кретање

када се тело не обрће, односи $O_1\xi\eta\zeta$ мирне у односу на $Oxyz$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_r$

$\vec{a} = \vec{a}_{O1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{a}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$

$\vec{a} = \vec{a}_{O1} + \vec{a}_r + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$

$2\vec{\omega} \times \vec{V}_r = \vec{a}_{cor}$

$a_{cor} = 2\omega \cdot V_r \sin\angle(\vec{\omega}, \vec{V}_r)$

$\vec{a}_{cor} = 0$

када

I $\vec{\omega} = 0$

II $\vec{V}_r = 0$

III $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_r$

$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$

$\vec{a}_r = \ddot{\xi}\vec{\lambda} + \ddot{\eta}\vec{\mu} + \ddot{\zeta}\vec{\nu}$

$\vec{a}_p = \vec{a}_{O1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$

$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ У БЕОГРАДУ	**Машински елементи 1**	Задатак бр. 1 Лист бр. 1

42.) Основни закони динамике – Њутнови закони

– у односу на коо сист који мирује или се креће равномерно праволинијски

I Њ.З. – Закон инерције

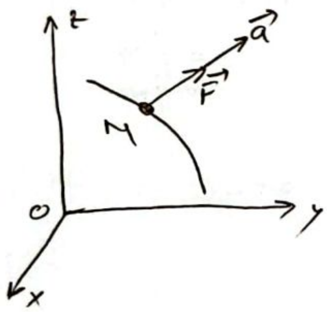
– Изолована мат. тачка се налази у стању мировања или равномерног кретања.

изолована = слободна, ако је тачка слободна а под дејством је неког система сила, онда је тај систем уравнотежен

– инерцијални коо систем.

Т: Изолована мат. тач. се креће у инерцијалним коорд. системима равномерно и праволинијски

II Њ.З. – основни закон динамике



$\vec{F} = m\vec{a}$ маса мат. тачке

* Убрзање мат тачке пропорционално је сили која делује на ту тачку и има правац те силе

$F = ma = m_1 a_1$

$m = m_1 \dfrac{a_1}{a}$; $\dfrac{F_1}{m_1} = \dfrac{F}{m} = g$

III Њ.З. – акције и реакције – дејству и противдејству

Силе којима две тачке делују једна на другу имају исту нападну линију, једнаког интензитета, али супр. смерова

IV Њ.З. – Закон независног дејства сила

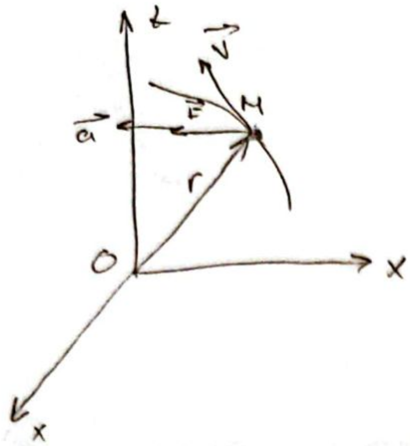
Ако на мат тачку истовремено делује више сила, свако убрзање је независно од осталих

$\vec{F}_i = m\vec{a}_i$ $\quad \sum_i \vec{F}_i = m \sum_i \vec{a}_i$ $\quad m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$

Број индекса	Презиме и име	Датум	Шк. год.	Прегледао

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ У БЕОГРАДУ	Машински елементи 1	Задатак бр. 1 / Лист бр. 1

(43) Диф. j-не кретања слободне тачке



$m\vec a = \vec F$

$m\ddot{\vec r} = \vec F$

$m\ddot{\vec r} = \vec f(t, \vec r, \vec v)$

t – независна пром

r – зависна пром јер $\vec r = \vec r(t)$

$\vec F = \vec f_1(t)$ силе које
$\vec F = \vec f_2(\vec r)$ зависе
$\vec F = \vec f_3(\vec V)$ од времена, положаја или брзине

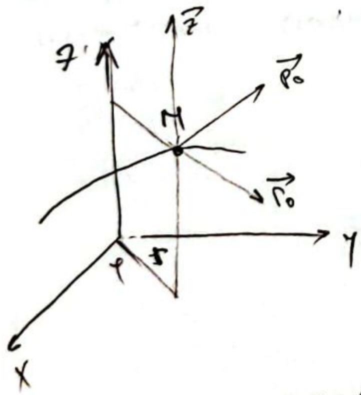
* У Декартовим коорд.

$$\left.\begin{aligned} m\ddot x &= X(t, \overbrace{x, y, z}^{r}, \overbrace{\dot x, \dot y, \dot z}^{v}) \\ m\ddot y &= \dots \\ m\ddot z &= \dots \end{aligned}\right\}$$ Дифф. j-не кретања тачке у Декартовим коорд.

тако се креће у равни $z=0,\ \dot z=0,\ \ddot z=0$ } —II— у равни

*праволинијски $y,z=0,\ \dot y,\dot z=0,\ \ddot z,\ddot y=0$ → —II— праволинијски

* Поларно цилиндричне



$\vec r_0 = r\cos\varphi\,\vec i + r_0\sin\varphi\,\vec j$

$\vec r = r\,\vec r_0$

$$\boxed{\begin{aligned} m a_r &= m(\ddot r - r\dot\varphi) \\ m a_p &= m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi) \\ m a_z &= m\ddot z \end{aligned}}$$

+диф. j-не кретања тачке у поларно цилиндричним коорд.

$\vec V = \dot{\vec r} = \dot r\vec r_0 + r\dot{\vec r}_0 = \dot r\vec r_0 + r\dot\varphi\vec p_0$

$\vec a = \dot{\vec v} = \ddot r\vec r_0 + \dot r\dot{\vec r}_0 + \ddot\varphi\vec p_0 + \dot\varphi\dot{\vec p}_0$

$a = \ddot r\vec r_0 + \dot r\dot\varphi\vec p_0 + \ddot\varphi\vec p_0 + \dot\varphi^2\vec r_0$

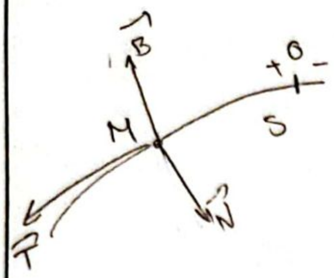
$\dot{\vec r}_0 = -\sin\varphi\cdot\dot\varphi\,\vec i + \cos\varphi\cdot\dot\varphi\,\vec j = \dot\varphi\vec p_0$

$\vec p_0 = -\sin\varphi\,\vec i + \cos\varphi\,\vec j$

Број индекса	Презиме и име	Датум	Шк. год.	Прегледао

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ У БЕОГРАДУ	Машински елементи 1	Задатак бр. 1
		Лист бр. 1

Ојлерове диф. ј-не



$$ma_T = m\ddot{s}$$

$$ma_N = m\frac{\dot{s}^2}{R_k}$$

$$ma_B = 0$$

→ Ојлерове природне диф. ј-не кретања тачке

$s = s(t)$

(44) 2 основна задатка динамике тачке

I Одредити силу која делује на тело ако се познато њено кретање и њена маса

$$\vec{r} = \vec{f}(t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{f}}(t) = a$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$X = m\ddot{x}$$

$$Y = m\ddot{y} \qquad F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$Z = m\ddot{z}$$

II Одредити кретање тачке ако је позната маса, почетни положај, почетна брзина и сила.

$$t = t_0$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r_0}$$

$$\vec{V}(t_0) = \vec{V_0}$$

$$\vec{r} = ?$$

$$\vec{r} = \vec{f}(t, \vec{C_1}, \vec{C_2})$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{f}}(t, \vec{C_1}, \vec{C_2})$$

$$\vec{f}(t_0, \vec{r_0}, \vec{V_0}) \equiv \vec{r_0}$$

$$\dot{\vec{f}}(t_0, \vec{r_0}, \vec{V_0}) \equiv \vec{V_0}$$

Број индекса	Презиме и име	Датум	Шк. год.	Прегледао

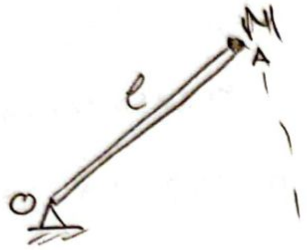
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ У БЕОГРАДУ	Машински елементи 1	Задатак бр. 1
		Лист бр. 1

(45) Динамика - везане - неслободне тачке

Тачка која је спремна да заузме било који положај у простору

Услови који недозвољ. тачки да називају се везе

најчешће реализоване помоћи других објеката



← тачка је приморана да се креће по сфери полупречника l

* сила којом тачка делује на везу је притисак на везу
* сила којом веза делује на тачку је реакција везе

Активне - оне које изазивају кретање

принцип ослобађања од веза

*Кретање неслободне тачке се може посматрати као кретање слободне тачке ако се уклоне везе а оне замене реакцијама веза на ту тачку

$\vec{F}^a$ - активне сие.

$\vec{R}$ - реакција везе.

дал јма

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^a + \vec{R}$ - скаларне диф. ј-не када пројектујемо на коо. осе

I задатак неслоб. тачке - познате ј-не кретања и активне силе и преко њих се налазе силе реакције веза

II зад. несл. тачке - одређивање коначних једн. кретања

(46) Везе - једначине веза

*Ако се тачка креће по линији, површини или делу простора, њене коорд. морају да задовоље аналитички израз путање.

$f(x,y,z)=0$ - гранична вредност, одвајање од подлоге

,недостижна вредност

$x^2+y^2+z^2-l^2=0$

$x^2+y^2+z^2-l^2 \le 0$ - недостижна вр.

Број индекса	Презиме и име	Датум	Шк. год.	Прегледао

подела веза
- геометријске - коначне
- кинематичке - диференцијалне

*Везе су геометријске само ако ограничавају положај тачке
*везе су кинематичке ако ограничавају кинематско кретање, да тачка убрзава и успорава

$$f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0$$

- неинтеграбилне или нехолономне

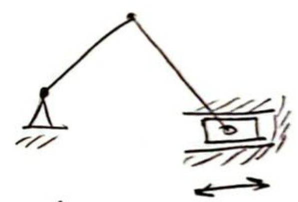
Везе се још деле на:

- стационарне - непроменљиве током времена
- нестационарне - зависе од времена $f(x,y,z,t)=0$

$$x^2+y^2+z^2-l^2(t)=0$$

Везе се деле на:

- задржавајуће - приморавају да се тачка за све време кретања налази на некој површи или линији
- незадржавајуће - тачка може да напусти везу у току свог кретања, и да настави слободно кретање



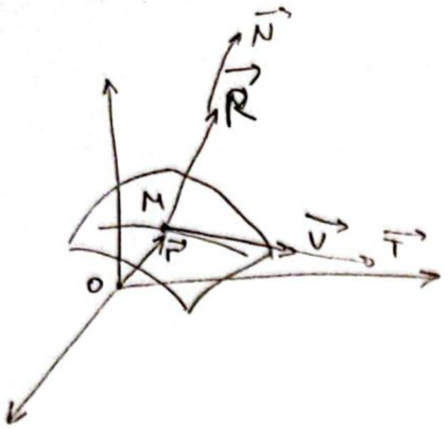
Везе се деле на:

- идеалне - глатке - реакција везе управна на правац кретања тачке
- реалне - храпаве - реакција везе $\vec{R}$: осим нормалне компоненте $\vec{N}$ има и компоненту $\vec{F}_\mu$ у правцу кретања тачке $F_\mu \perp N$

$\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_\mu$ $\quad \left.\vec{F}_\mu = -F_T \frac{\vec{v}}{v}\right\}$ - супротан смер од брзине $\quad F_\mu$ - сила трења

Ако је за све време кретања $\vec{R}=0$, такве везе су неактивне, тривијалне

47) Кретање по идеалној непокретној површи



дејство везе се може заменити са $\vec{R}$

$\vec{R} = \vec{N}$

$$\text{grad } f = |\text{grad } f|\,\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{R} = \vec{N} = \lambda \text{ grad } f$$

λ – лагранжов множитељ везе $\lambda \neq const$

$$m\vec{a} = \vec{F^a} + \vec{R}$$

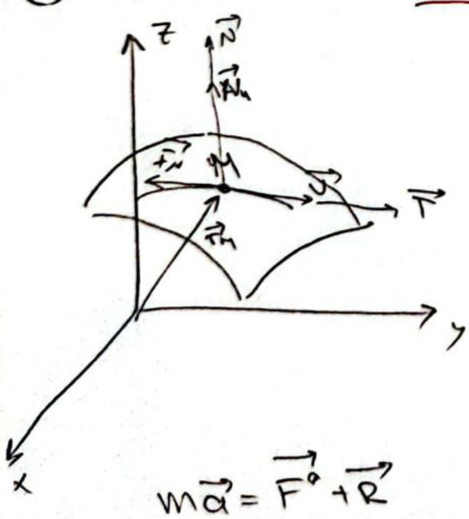
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F^a} + \lambda \text{ grad} f$$

$$\vec{N} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \vec{N_x} + \vec{N_y} + \vec{N_z}\,; \quad N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X^a + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= Y^a + \dots \\ m\ddot{z} &= \dots \end{aligned}\right\} \text{ лагранжеве једначине I врсте}$$

прво се одреди λ, одредимо други извод по f и тако добијемо релацију за добијање λ, за добијање коначних ј-на, убацимо множитељ у ј-не и даље интегралимо

48) Кретање по реалној непокретној површи



$$f(x,y,z) = 0$$

$$\vec{N} = \lambda \text{ grad } f$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{N} = \lambda \text{ grad} f$$

$$\vec{F_\mu} = -F_\mu\frac{\vec{v}}{v}$$

$F_\mu = \mu N$ коеф. трења површине

$$m\vec{a} = \vec{F^a} + \vec{R}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F^a} + \vec{N_n} + \vec{F_\mu}$$

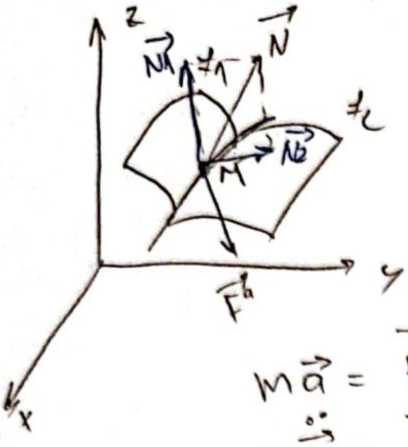
$$m\ddot{x} = X^a + \vec{N_x} + \vec{F_{\mu x}}$$

$$\vdots = \dots$$

(49) Кретање по идеалној непокретној кривој

крива, значи имамо f_1 и f_2

$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$, $f_2(x_2, y_2, z_2) = 0$



$$\vec{R} = \vec{N} = \vec{N_1} + \vec{N_2}$$

$$\vec{N_1} = \lambda \,\mathrm{grad}\, f_1 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i} + \dots$$

$$\vec{N_2} = \lambda \,\mathrm{grad}\, f_2 = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{i} + \dots$$

$$\vec{N_1} = \vec{N_{1x}} + \vec{N_{1y}} + \vec{N_{1z}} \qquad N_1 = \sqrt{N_{1x}^2 + N_{1y}^2 + N_{1z}^2}$$

$$\vec{N_2} = \vec{N_{2x}} + \vec{N_{2y}} + \vec{N_{2z}} \qquad N_2 = \dots$$

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$m\vec{a} = \vec{F^a} + \vec{R}$$

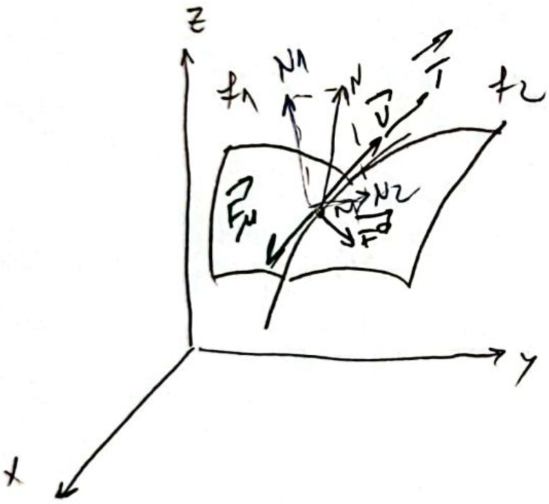
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F^a} + \vec{N_1} + \vec{N_2}$$

$\ddot{x} = \dots$

$\ddot{y} = \dots$

$\ddot{z} = \dots$

(50) Кретање по реалној непокретној кривој



$$\vec{N} = \vec{N_1} + \vec{N_2}$$

$$F_\mu = -F_\mu \frac{\vec{v}}{v}$$

$$F_\mu = \mu \cdot \vec{N} = \mu \,|\lambda_1 \mathrm{grad}\, f_1 + \lambda_2 \mathrm{grad}\, f_2|$$

$$m\vec{a} = \vec{F^a} + \vec{R}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F^a} + \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{F_\mu}$$

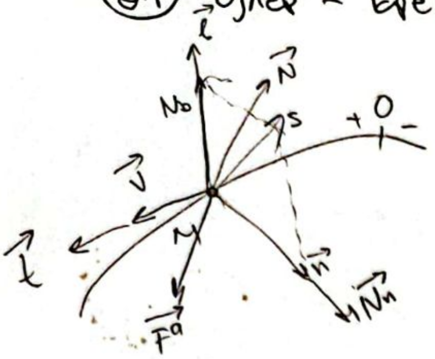
$\ddot{x} = \dots$

$\ddot{y} = \dots$

$\ddot{z} = \dots$

(51) 1

(51) Ојлер – кретање по идеалној непокретној кривој



$$\vec{R} = \vec{N_n} + \vec{N_b} \qquad N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}$$

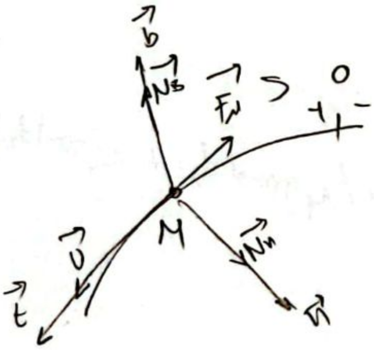
$$m\vec{a} = \vec{F^a} + \vec{R}$$

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_t^a(s,\dot{s},t) \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{R_k} = F_n^a(s,\dot{s},t) + N_n \\ 0 = F_b^a(s,\dot{s},t) + N_b \end{cases}$$

F_t^a, F_b^a, F_n^a – пројекције F^a на осе

Ојлерове ј-не кретања по кривој у природном облику

(52) Ојлер – кретање по реалној непокретној кривој



$$m\vec{a} = \vec{F^a} + \vec{R}$$

$$\vec{R} = \vec{N_n} + \vec{N_b} + \vec{F_\mu} \qquad N = \chi_B \operatorname{grad} f_1 +$$

$$F_\mu = \mu N$$

$$\vec{R} = N_n\vec{n} + N_b\vec{b} - F_\mu \frac{\vec{V}}{V}$$

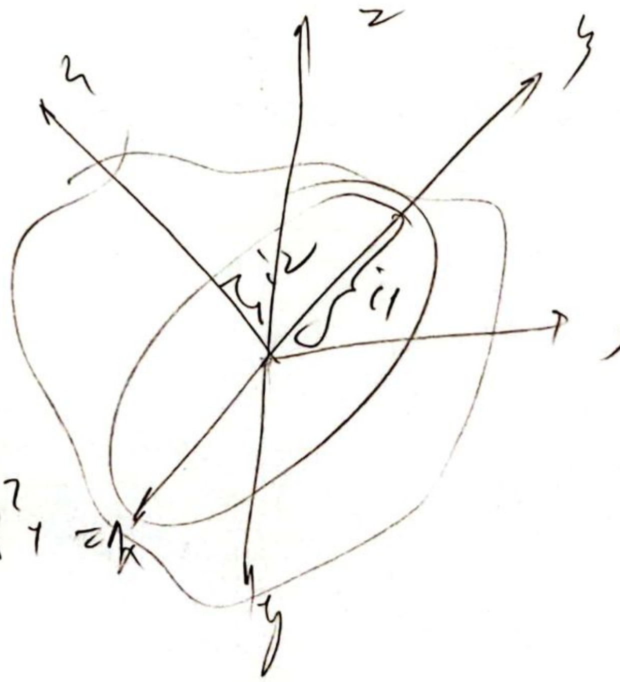
$$\vec{V} = \dot{s}\vec{t}$$

$$-\mu\sqrt{N_b^2 + N_n^2}\,\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \qquad = \frac{\vec{V}}{V}$$

$$m\ddot{s} = F_t^a - F_\mu$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{R_k} = F_n^a + N_n$$

$$0 = F_b^a + N_b$$



$$J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + = k$$