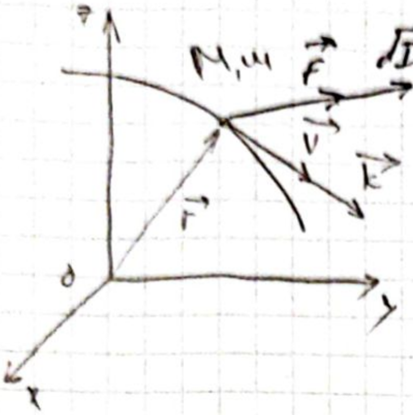
I област

1. Количина кретања тачке. Импулс силе.

Количина кретања тачке пропорционална је њеној маси и брзини, има смер брзине



$$\vec{K}=m\vec{V}$$

- Елементарни импулс силе - производ силе која делује у елементарно малом делићу времена

$$d\vec{I}=\vec{F}dt$$

- Укупни импулс сила је количина силе која делује у датом вр. интервалу

$$\vec{I}=\int_{t_0}^{t_1} d\vec{I}=\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}dt \longrightarrow \vec{I}=\vec{F}(t_1-t_0)$$

$$\vec{I}=I_x\vec{i}+I_y\vec{j}+I_z\vec{k} \qquad I=\sqrt{I_x^2+I_y^2+I_z^2}$$

$$\cos\angle(\vec{I},\vec{i})=\frac{I_x}{I}$$

$$\cos\angle(\vec{I},\vec{j})=\frac{I_y}{I}$$

$$\cos\angle(\vec{I},\vec{k})=\frac{I_z}{I}$$

$$(\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}\dots\vec{F_n})\sim\vec{F_u}$$

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}\dots\vec{F_n}\ /\cdot dt \qquad \vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}$$

$$\vec{F}dt=\vec{F_1}dt\dots\vec{F_n}dt$$

$$\vec{I}=\sum_{i=1}^{n}\vec{I_i}=\vec{I_1}+\vec{I_2}+\dots+\vec{I_n}$$

2. Теорема о промени кол. крет. Закон о одржању кол. крет.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \qquad \vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\frac{dK_x}{dt} = X, \quad \frac{dK_y}{dt} = Y, \quad \frac{dK_z}{dt} = Z$$

$$d\vec{K} = \vec{F}dt \quad / \int$$

$$\int_1^2 d\vec{K} = \int_1^2 \vec{F}dt$$

$$\vec{K_2} - \vec{K_1} = \vec{I}$$

$$I_x = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1$$

$$I_y = m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1$$

$$I_z = m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1$$

* Промена количине кретања у неком вр. интервалу једнака је импулсу силе који делује у том интервалу

Privatni časovi
LaganiniMašinac
065 22 54 100

$$(\vec{F_1}, \vec{F_2}, \dots, \vec{F_n}) \sim 0$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0$$

1) $\vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{K}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{K} = const \rightarrow \vec{v} = const$

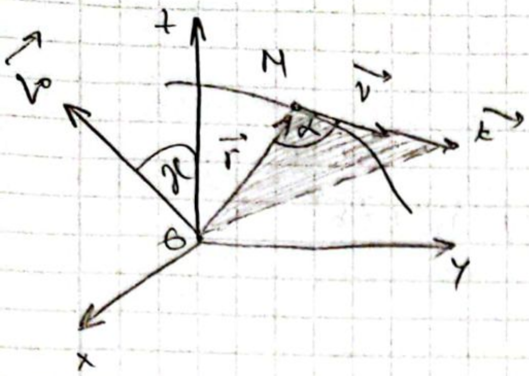
- тачка се креће рав. праволинијски, константна је промена количине кретања

2) $\vec{F} \neq 0, \; F_x = 0 \rightarrow \frac{dK_x}{dt} = 0 \rightarrow K_x = const$

$m\dot{x} = const$

Непокретну

3. Теорема о промени кин. мом. тачке у односу на пол но



$$\vec{L_0} = \vec{r} \times m\vec{V}$$
$$= \vec{r} \times \vec{k}$$
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{k} = m\dot{x}\vec{i} + m\dot{y}\vec{j} + m\dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{L_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

$$L_{ox} = m(y\dot{z} - z\dot{y})$$
$$L_{oy} = m(x\dot{z} - z\dot{x})$$
$$L_{oz} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

$$L_0 = rmV \cdot \sin\angle(\vec{r}, \vec{v}) = rmV\sin\alpha$$
$$L_0 = mVh \qquad r\sin\alpha = h$$

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \cancel{\vec{V} \times m\vec{V}}^{\,0} + \vec{r} \times m\vec{a}$$
$$\vec{V} \times m\vec{V} = mV^2 \cancel{\sin 0}^{\,0}$$

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M_0}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$
$$\dot{\vec{L_0}} = \vec{M_0}(\vec{F})$$

$$\dot{L}_{oz} = yZ - zY$$

$L_{ox}, L_{oy} \dots$

4. Закон о одржању кин. мом. за неп. пол и осу

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

I

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \to \vec{L}_O = const \quad , \vec{M}_O(\vec{F}) = 0$$

1) $\vec{F} = 0$

2) нападна линија пролази кроз пол O, $\vec{r} = 0$

II $\vec{M}_O(\vec{F}) \neq 0$, $\vec{M}_{Oz}(\vec{F}) = 0$

$$Z = 0$$

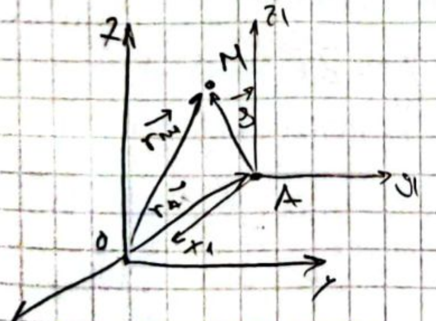
$$\to \frac{dL_{Oz}}{dt} = 0 \to L_{Oz} = const$$

$$L_{Oz}(t_0) = L_{Oz}(t_1)$$

$$t_0 = 0, \ \dot{x}_0 = 0, \ \dot{y}_0 = 0$$

$$L_{Oz}(t_0) = 0 = L_{Oz}(t_1)$$

5. Теорема о промени кин. мом. за покретан пол и осу



$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho} \qquad \vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}_M^*$$

$$\vec{L}_A = \vec{\rho} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\rho} \times m\vec{v}) = \dot{\vec{\rho}} \times m\vec{v} + \vec{\rho} \times m\vec{a}$$

$$\vec{\rho} = \vec{r}_M - \vec{r}_A$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{v}_M - \vec{v}_A$$

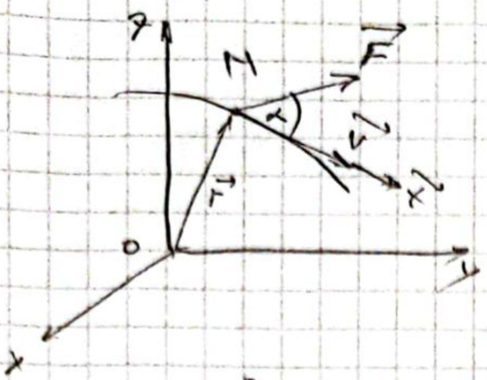
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \underbrace{\cancel{\vec{v}_M \times m\vec{v}_M}}_{0} - \vec{v}_A \times m\vec{v} + \vec{\rho} \times m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) - \vec{v}_A \times m\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{M}_A(\vec{F}) = \dot{\vec{L}}_A + \vec{v}_A \times m\vec{v}}$$

Теорема о промени кин. мом. за пок. пол.

6. Елементарни и укупни рад сile



Privatni časovi
LaganiniMašinac
065 22 54 100

+ елемент. рад једнак је скаларног производа брзине тачке и елементарног импулса сile.

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{V} dt$$

$$\delta A = \vec{F}\vec{V} dt = d\vec{I}\,\vec{V}$$

* Елементарни

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \rightarrow d\vec{r} = \vec{T} ds$$

$$\delta A = \vec{F}\vec{T} ds \qquad F_t = F\cos\alpha \ , \ \vec{F}_t = F\vec{T}$$

$$\delta A = \vec{F_t} ds$$

$$\delta A = \begin{cases} > 0 & 0 \le \alpha < 90^\circ \\ = 0 & \alpha = 90^\circ \\ < 0 & 90^\circ < \alpha \le 180^\circ \end{cases}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = X dx \vec{i} + Y dy \vec{j} + Z dz \vec{k}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \rightarrow dx = \dot{x} dt$$

$$\delta A = (X\dot{x}\vec{i} + Y\dot{y}\vec{j} + Z\dot{z}\vec{k}) dt$$

* укупни рад

$$\vec{F_i} \, \Delta\vec{r_i}$$

$$A_{sr} = \sum \vec{F_i} \Delta \vec{r_i} \rightarrow A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \Delta\vec{r_i}$$

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r}$$

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\vec{v}dt = \int_{M_1}^{M_2} F_t ds$$

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})dt$$

7. Рад резултанте система сила

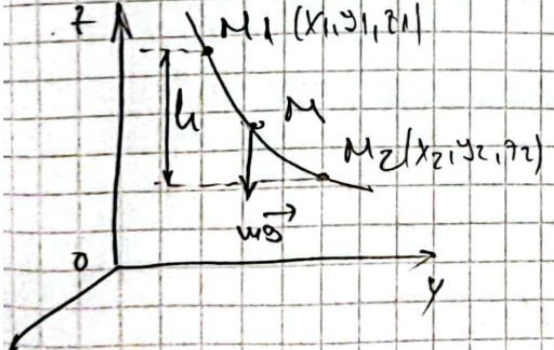
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_1} d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_2} d\vec{r} + \dots + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_n} d\vec{r}$$

$$A_{M_1M_2} = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

*Рад резултанте система сила које делују на тачку једнак је алгебарском збиру радова компонената

8. Рад тежине тачке



$$m\vec{g} = mg\vec{k}, \quad Z = -mg, \; X, Y = 0$$

$$A_{M_1M_2}(m\vec{g}) = \int_{M_1}^{M_2} -mg\, dz$$

$$A_{M_1M_2}(m\vec{g}) = -mg(z_2 - z_1)$$

$$A_{M_1M_2}(m\vec{g}) = -mgh$$

- ако иде на доле тачка, онда $z_2 - z_1 < 0$

па је $A_{M_1M_2} > 0$

- ако се креће на горе, $z_2 - z_1 > 0 \rightarrow A_{M_1M_2} < 0$

* сила З. Т. је конзервативна, њен рад не зависи од пређеног пута већ само од поч. и крајњег пол.

9. Снага силе

* Снага силе је карактеристика промена рада силе у времену

$$P_{sr} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\delta A}{dt} \qquad \delta A = \vec{F} d\vec{r}$$

$$\boxed{P = \frac{\delta A}{dt}} \qquad \underline{P = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}} \qquad \left[N\frac{m}{s} = W\right]$$

$$P = F \cdot V \cos\measuredangle(\vec{F}, \vec{v})$$

$$P = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}$$

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} P(t)dt$$

Privatni časovi
LaganiniMašinac
065 22 54 100

10. Кин. енергија + Теорема о промени кин. енергије

$$E_k = \frac{1}{2}mV^2 \quad \left[kg\frac{m^2}{s^2}\right] = J = Nm = W\cdot s$$

* Кинетичка енергија је половина производа масе и квадрата брзине тачке.

$$m\vec{a} = \vec{F} \;/ \cdot d\vec{r}$$

$$m\vec{a}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$$

$$m\vec{v}d\vec{v} = dA$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2 \;/ \frac{d}{dt}$$

$$2\vec{v}d\vec{v} = 2vdv$$

$$\vec{v}d\vec{v} = vdv$$

$$mVdV = dA$$

$$Vdv = d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$m\frac{1}{2}dv^2 = dA$$

$$\boxed{dE_k = dA}$$

* елементарна промена кин. ен. једнака је елементарном раду сила које делују на тачку

$$\int_{M_1}^{M_2} dE_k = \int_{M_1}^{M_2} dA$$

→ коначна промена кинетичке енергије у временском интервалу једнака је укупном раду сила које делују на тачку

$$E_{k_2} - E_{k_1} = A_{M_2 M_1}$$

$$\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = A_{M_2 M_1}$$

11. Диф. јне кретања мат. система

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u$$

$$m_i \ddot{x}_i = X_i^s + X_i^u$$

$$m_i \ddot{y}_i = Y_i^s + Y_i^u$$

$$m_i \ddot{z}_i = Z_i^s + Z_i^u$$

* ако посматрамо тачку M_i, масе m_i, на растојању $\vec{r}_i$ од пола O, $Oxyz$

– на овај начин је описано кретање мат. система

12. Количина кретања мат. система и крутог тела

– мат. система

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \quad / \cdot m$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$ → укупна маса система

$$m \vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \quad / \frac{d}{dt}$$

$$m \vec{V}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i$$

$$\vec{K} = m \vec{V}_c = \vec{K}_c$$

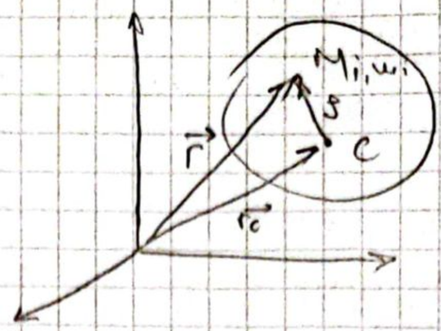
→ количина кретања мат. сист. је количина кретања центра масе као да је у њему сконцентрисана сва маса.

- круто тело

$$\vec{K} = \int_m \vec{v}\,dm$$

$$\vec{v} = \vec{v_c} + \vec{v_M^c}$$

$$\vec{v} = \vec{v_c} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$



$$\vec{K} = \int_m \vec{v_c}\,dm + \int_m \vec{\omega}\times\vec{\rho} = \int_m \vec{v_c}\,dm + \vec{\omega}\times\cancel{\int_m \vec{\rho}\,dm}$$

$\int_m \vec{\rho}\,dm = 0$ - вектор положаја центра масе у односу на центар масе је 0

$$\vec{K} = \int_m \vec{v_c}\,dm$$

$$\boxed{\vec{K} = m\vec{v_c}}$$

13. Теорема о промени кол. кретања. Закон о одржању кол. кр

$$\vec{K_i} = m_i\vec{v_i} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{K_i}}{dt} = m_i\frac{d\vec{v_i}}{dt} = m_i\vec{a_i} \quad ; \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{K_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a_i} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i^s} + \vec{F_i^u}$$

$$m_i\frac{d\vec{v_i}}{dt} = \vec{F_i^s} + \vec{F_i^u}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{K_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i^s} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i^u}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i^u} = 0$$

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F_R^s} \qquad \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i^s} = \vec{F_R^s}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F_R^s}}$$

* ~~Промена~~ извод по времену количине кретања једнак је главном вектору резултанте свих спољашњих сила које делују на тело / систем

$$\frac{dK_x}{dt} = X_R^S \quad \frac{dK_y}{dt} = Y_R^S \quad \frac{dK_z}{dt} = Z_R^S$$

$$\int_1^2 d\vec{K} = \int_1^2 \vec{F}_R^S dt$$

$$\vec{K_2} - \vec{K_1} = \vec{I}_{1R}^S$$

→ прираштај количине кретања у коначном врем. интервалу једнак је импулсу силе за тај интервал

$$K_{x2} - K_{x1} = \int X_R^S dt = I_{xR}^S$$

$$K_{y2} - K_{y1} = \ldots$$

$$K_{z2} - K_{z1} = \ldots$$

1) $\vec{F}_R^S = 0$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = 0 \quad , \vec{K} = const$$

→ када на систем делује систем спољ. сила такав да му је главни вектор једнак нули, онда му је константна количина кретања.

$t_0 = 0$, $V_0 = 0$, $K_0 = 0 \rightarrow \vec{K} = 0$ (посебан случај)

2) $\vec{F}_R^S \neq 0$, $X_R^S = 0$

$$\frac{dK_x}{dt} = 0 \rightarrow \vec{K_x} = const$$

$$K_x(t_0) = 0 \rightarrow K_x(t_1) = 0$$

$$K_x = 0 \rightarrow m\dot{x} = 0 \rightarrow m_i x_i = const$$

14. Теорема о кретању средишта масе

Закон о кретању средишта масе

$\dot{\vec{K_c}} = \vec{F_R^s}$

$m\vec{a_c} = \vec{F_R^s}$

$m\ddot{x}_c = X_R^s$, $m\ddot{y}_c = Y_R^s$, $m\ddot{z}_c = Z_R^s$

1) $\vec{F_R^s} = 0$

$m\vec{a_c} = 0$, $m\frac{d\vec{v_c}}{dt} = 0$, $\vec{v_c} = const$

+ ако je главни вектор .... $= 0$, онда се центар масе креће равномерно праволинијски

+ спец. сл. $\vec{F_R^s} = 0$

$\vec{v_c}(t_0) = 0 \rightarrow \vec{r_c} = const$

2) $\vec{F_R^s} \neq 0$, $X_R^s = 0$

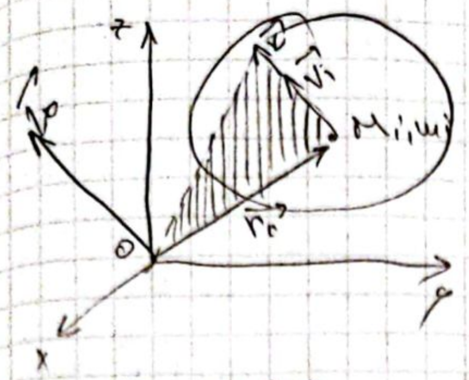
$m\ddot{x}_c = 0 \rightarrow \dot{x}_c = \vec{v_{cx}} = const$

+ $\vec{v_{cx}}(t_0) = 0$

$\rightarrow x_c = const$, $mx_c = const$

$mx_c = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = const$

15. Мом. количине кретања мат. сист



$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{K}$$

за тачку

за систем

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

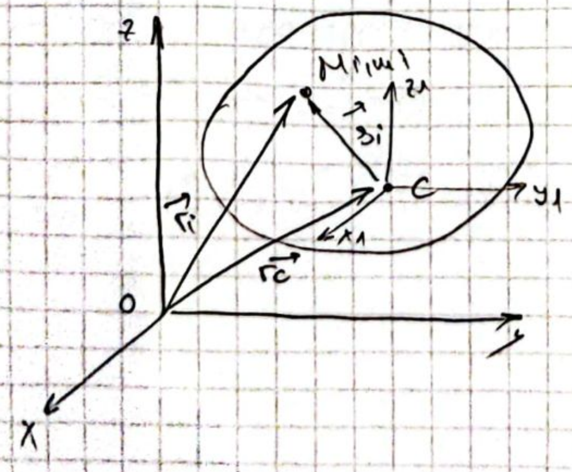
$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ m\dot{x}_i & m\dot{y}_i & m\dot{z}_i \end{vmatrix}$$

$$L_{Ox} = \vec{L}_O \vec{i} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{z}_i y_i - z_i \dot{y}_i)$$

$$L_{Oy} = \vec{L}_O \vec{j} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \dot{z}_i - \dot{x}_i z_i)$$

$$L_{Oz} = \vec{L}_O \cdot \vec{k} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i m \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)$$

16. Веза између мом. кол. кретања мат. сист. у односу на непокретни пол и средиште маса



$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_C + \vec{V}_{M_i}^{C}$$

Privatni časovi
LaganiniMašinac
065 22 54 100

$$\vec{L_0} = \sum_{i=1}^{4} \vec{r_i} \times m_i \vec{V_i}$$

$$\vec{r_i} = \vec{r_c} + \vec{\rho} \quad , \vec{V_i} = \vec{V_c} + \vec{\omega} \times \vec{\rho_i}$$

$$\vec{L_0} = \sum_{i=1}^{4} (\vec{r_c} + \vec{\rho}) \times m_i (\vec{V_{ci}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho_i})$$

$$\vec{L_0} = \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \vec{r_c} \times m_i \vec{V_{ci}}}_{I} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \vec{\rho} \times m_i \vec{V_{ci}}}_{II} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \vec{r_c} \times m_i \vec{V_{Mi}^{c}}}_{III} + \underbrace{\sum_{i=1} \vec{\rho} \times m_i \vec{V_{Mi}^{c}}}_{IV}$$

$$I \quad \sum_{i=1}^{4} \vec{r_c} \times m_i \vec{V_{ci}} = \underline{\underline{\vec{r_c} \times m \vec{V_c}}}$$

$$II \quad \sum_{i=1}^{4} \vec{\rho} \times m_i \vec{V_{ci}} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{4} \vec{\rho_i} m_i = 0$$

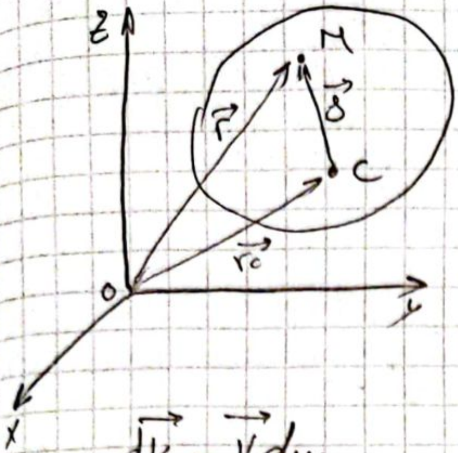
статички момент маса у односу на себ

$$III \quad \sum_{i=1}^{4} \vec{r_{ci}} \times m_i \vec{V_{Mi}^{c}} = 0 \rightarrow m_i \vec{V_{Mi}^{c}} = 0$$

$$IV \quad \sum \vec{\rho} \times m_i \vec{V_{Mi}^{c}} = \underline{\underline{\vec{L_c}}}$$

$$\boxed{\vec{L_0} = \vec{L_c} + \vec{r_c} \times m \vec{V_c}}$$

17. Момент количине кретања крутог тела



$$\vec{r} = \vec{r_c} + \vec{\rho}$$
$$\vec{V} = \vec{V_c} + \vec{V_M^c}$$

$$d\vec{K} = \vec{V}\,dm$$

$$\vec{L_O} = \int_m \vec{r} \times d\vec{K} = \int_m (\vec{r} \times \vec{V})\,dm$$

$$\vec{L_O} = \int_m ((\vec{r_c} + \vec{\rho}) \times \vec{V})\,dm = \int_m \vec{r_c} \times \vec{V}\,dm + \int_m \vec{\rho} \times \vec{V}\,dm$$

$$\vec{L_O} = \vec{L_C} + \vec{r_c} \times \vec{K_c}$$

$$\vec{L_C} = \int_m \vec{\rho} \times \vec{V}\,dm \quad , \quad \vec{V} = \vec{V_c} + \vec{V_M^c}$$

$$\vec{L_C} = \int_m \vec{\rho} \times (\vec{V_c} + \vec{V_M^c})\,dm = \underbrace{\cancel{\int_m \vec{\rho} \times \vec{V_c}\,dm}}_{0} + \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\,dm$$

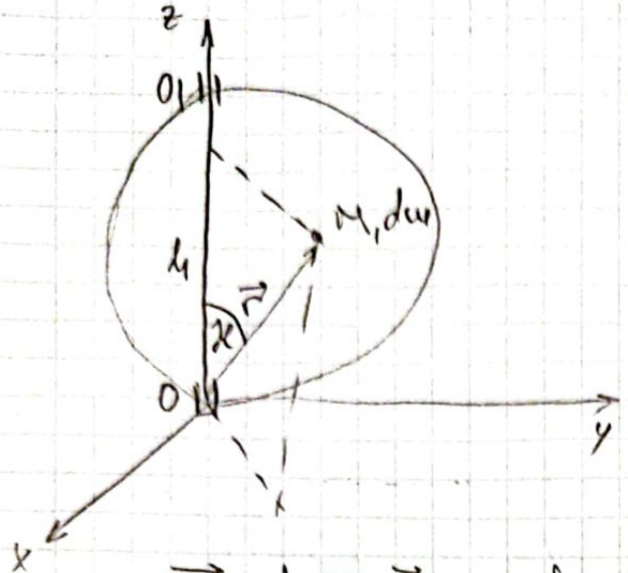
$$\boxed{\vec{L_C} = \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\,dm}$$

+ када се тело креће транслаторно

$$\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{L_C} = 0$$

$$\vec{L_O} = \vec{r_c} \times m\vec{V_c} = \vec{r_c} \times \vec{K_c}$$

18. Момент количине кретања за обртну осу крутог тела које се обрће око непокретне осе



$$\vec{\omega} = \omega_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$z = r\cos\chi$$

$$\vec{L}_O = \int_m \vec{r} \times \vec{v}\,dm = \int_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{L}_O = \int_m \vec{\omega}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})\,dm - \int_m \vec{r}\cdot(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\,dm$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2 \cancel{\cos\sphericalangle(\vec{r},\vec{r})}^{\,1} = r^2$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{r} = \omega_z r \cos\sphericalangle(\vec{k},\vec{r}) = \omega_z r \cos\chi = \omega_z z$$

$$\vec{L}_O = \int_m \vec{\omega}\cdot r^2\,dm - \int_m \vec{r}\,\omega_z z$$

$$\vec{L}_O = \omega_z \vec{k}\int_m (x^2 + y^2 + \cancel{z^2})\,dm - \omega_z \int_m (xz\vec{i} + yz\vec{j} + \cancel{z^2\vec{k}})\,dm$$

$$\vec{L}_O = \omega_z \vec{k}\int_m (x^2+y^2)\,dm - \omega_z \int_m xz\vec{i}\,dm - \omega_z \int_m yz\vec{j}\,dm$$

$$\vec{L}_O = \omega_z \cdot J_{Oz}\vec{k} - \omega_z J_{xz}\vec{i} - \omega_z J_{yz}\vec{j}$$

$$J_{xz},\ J_{yz} \neq const$$

за осу Oz

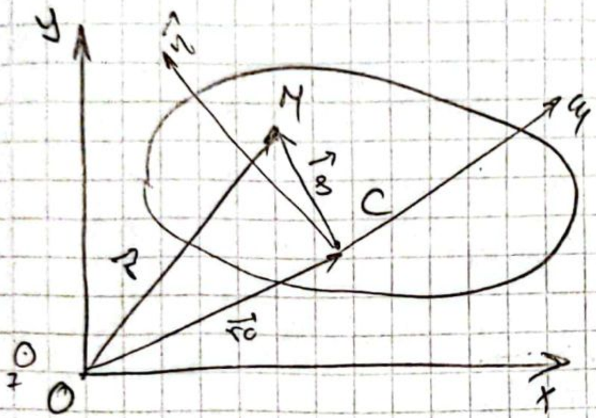
$$\vec{L}_{Oz} = \omega_z J_{Oz}\vec{k}$$

$$\boxed{L_{Oz} = \omega_z J_{Oz}}$$

* погодно је да овакво кретање опишемо преко $O_{\xi\eta\zeta}$ јер су њом онда вредности $J_{\xi\zeta}, J_{\eta\zeta} = const$, и онда следи

$$\boxed{\vec{L_O} = \omega_\zeta J_{O\zeta} \vec{\nu}}$$

19. Момент количине кретања тела које врши равно кретање



$$\vec{\rho} = \xi \vec{\lambda} + \eta \vec{\mu}$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \omega_\zeta \vec{\nu}$$

$$\vec{\rho}\,\vec{\rho} = \rho^2 \cos 0° = \rho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

$$\vec{L_O} = \vec{L_C} + \vec{r_C} \times \vec{K_C}$$

$$\vec{L_C} = \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm$$

$$\vec{L_C} = \int_m \vec{\omega}\, (\vec{\rho}\,\vec{\rho})\, dm - \cancel{\int_m \vec{\rho}\,(\vec{\omega}\,\vec{\rho})\, dm} \to 0$$

$$\int_m \vec{\rho}\, dm = 0$$

$$\vec{L_C} = \int_m \vec{\omega}\, \rho^2\, dm$$

$$\vec{L_C} = \omega_\zeta \vec{\nu} \int_m (\xi^2 + \eta^2)\, dm$$

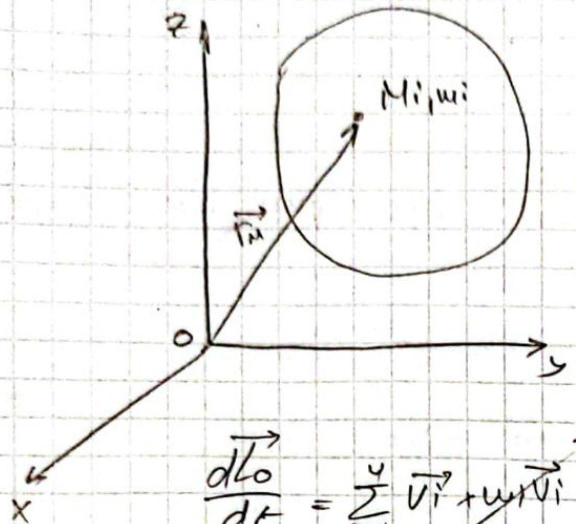
$$\boxed{L_C = \omega_\zeta J_{C\zeta}}$$

$$\vec{L_C} = \omega_\zeta J_{C\zeta} \vec{\nu}$$

$$\vec{L_O} = \vec{r_O} \times \vec{K_C} + \omega_\zeta J_{C\zeta}$$

20. Теорема о промени момента кол. кретања у односу на непокретан пол и осу.

Закон о одржању момента кол. кретања за непокретан пол и осу



$$\vec{L_o} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i}$$

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \cancel{\sum_{i=1}^{n} \vec{v_i} \times m_i \vec{v_i}}^{\to 0} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times m_i \vec{a_i}$$

$$\frac{d\vec{L_{oi}}}{dt} = \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \vec{r_i} \times (\vec{F_i}^s + \vec{F_i}^u)$$

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M_o}(\vec{F_i}^s) + \cancel{\sum \vec{M_o}(\vec{F_i}^u)}_{\to 0}$$

јер $\sum_{i=1}^{n} F_i^u = 0$

$\Rightarrow \vec{M_o}(\vec{F_i}^u) = 0$

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{M_o}^s$$

$$\frac{dL_{ox}}{dt} = M_{ox}^s, \quad \frac{dL_{oy}}{dt} = M_{oy}^s, \quad \frac{dL_{oz}}{dt} = M_{oz}^s$$

1) ако $\vec{M_o}^s = 0$

$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L_o} = const$

$\vec{L_o}(t_0) = 0 \rightarrow \vec{L_o}(t_1) = 0$

$\boxed{L_o(t_0) = L_o(t_1)}$

2) $\vec{M_o}^s \neq 0$, $\vec{M_{ox}}^s = 0$

$\frac{dL_{ox}}{dt} = 0$

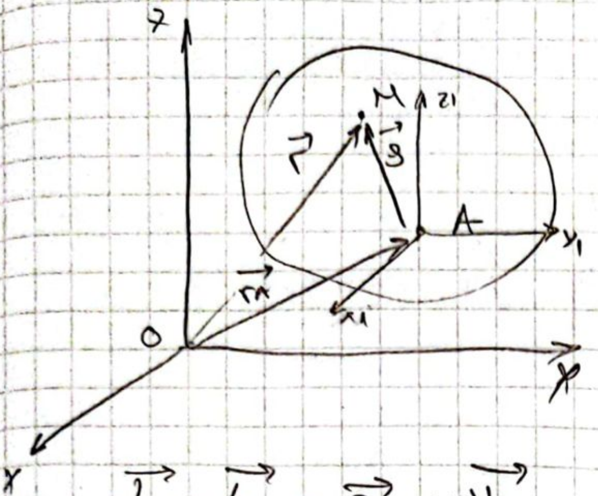
$L_{ox} = 0$

$L_{ox}(t_0) = 0$

$L_{ox}(t_1) = 0$

$\boxed{L_{ox}(t_0) = L_{ox}(t_1)}$

11. Теорема о промени момента количине кретања за покретни пол и осу



$$\vec{r_i} = \vec{r_A} + \vec{\rho_i}$$

$$\vec{v} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{L_O} = \vec{L_A} + \vec{r_C} \times m\vec{v_C}$$

$$\vec{L_A} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho_i} \times m_i \vec{v_i} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\rho_i}}{dt} \times m_i \vec{v_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho_i} \times m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt}$$

$$\vec{\rho_i} = \vec{r_i} - \vec{r_A} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\rho_i}}{dt} = \vec{v_i} - \vec{v_A}$$

$$* \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\rho_i}}{dt} \times m_i \vec{v_i} = \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} \vec{v_i} \times m_i \vec{v_i}}}_{0} - \sum_{i=1}^{n} \vec{v_A} \times m_i \vec{v_i}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \vec{v_A} \times m_i \vec{v_i} = \vec{v_A} \times m\vec{v_C}$$

$$** \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho_i} \times (\vec{F_i^s} + \cancel{\vec{F_i^u}}^{\,0}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho_i} \times \vec{F_i^s} = \sum_{i=1}^{n} M_{Ai}(\vec{F_i^s}) = \vec{M_A^s}$$

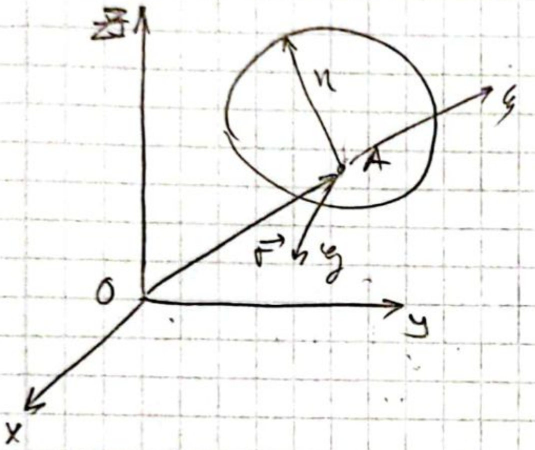
$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = -\vec{v_A} \times m\vec{v_C} + \vec{M_A^s}$$

$$\boxed{\vec{M_A^s} = \frac{d\vec{L_A}}{dt} + \vec{v_A} \times m\vec{v_C}}$$

* разликује се од непокретне осе само за компоненту $\vec{V_A} \times m\vec{V_C}$

$\vec{V_A} \times m\vec{V_C} = 0$ ако:

1) $\vec{V_A} = 0$, пол A је непокретан
2) $\vec{V_C} = 0$, ~~...~~ средиште масе је непокретно
3) $\vec{V_A} \parallel \vec{V_C}$ паралелни вектори
4) $A \equiv C \rightarrow \vec{V_A} \parallel \vec{V_C}$



– сада посматрано само пол A

$$\vec{L_A} = L_{A\xi}\vec{\lambda} + L_{A\eta}\vec{\mu} + L_{A\zeta}\vec{\nu} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \frac{dL_{A\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{A\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{A\zeta}}{dt}\vec{\nu}$$

$$+ L_{A\xi}\dot{\vec{\lambda}} + L_{A\eta}\dot{\vec{\mu}} + L_{A\zeta}\dot{\vec{\nu}}$$

$$\frac{d_r\vec{L_A}}{dt} = \frac{dL_{A\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{A\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{A\zeta}}{dt}\vec{\nu}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega} \times \vec{\lambda} \quad , \quad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega} \times \vec{\mu} \quad , \quad \dot{\vec{\nu}} = \vec{\omega} \times \vec{\nu}$$

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \frac{d_r\vec{L_A}}{dt} + \vec{\omega} \times (L_{A\xi}\vec{\lambda} + L_{A\eta}\vec{\mu} + L_{A\zeta}\vec{\nu})$$

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \frac{d_r\vec{L_A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L_A}$$

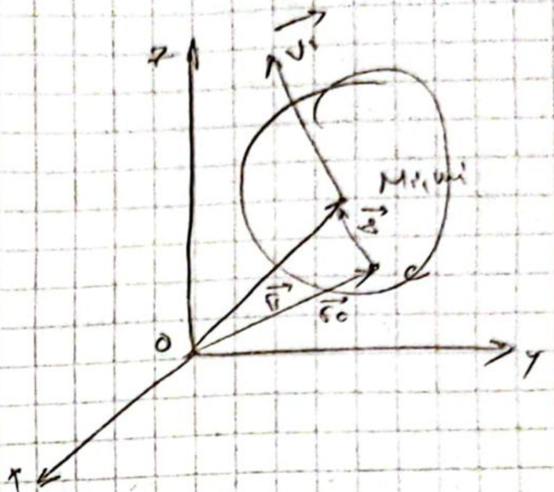
$\frac{d_r\vec{L_A}}{dt}$ – локални, релативни кинетички мом.

$$(*) \quad \vec{M_A^s} = \frac{d_r\vec{L_A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L_A} + \vec{V_A} \times m\vec{V_C} \quad (*)$$

22. Кин. енергија крутог тела

Кин. ен. крутог тела где се креће транслаторно

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$ - општа



* крутог тела

$$E_k = \frac{1}{2}\int_m (\vec{v}\cdot\vec{v})\,dm = \frac{1}{2}\int_m v^2\,dm$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2 \cancel{\cos\vartheta}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\int_m (\vec{v}_c + \vec{\omega}\times\vec{\rho})^2\,dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int_m v_c^2\,dm + \frac{1}{2}\int_m \cancel{2\vec{v}_c\,(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\,dm} + \frac{1}{2}\int_m (\vec{\omega}\times\vec{\rho})^2\,dm$$

$$\int_m \vec{v}_c\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = 0 \quad \text{јер} \quad \vec{v}_c \perp (\vec{\omega}\times\vec{\rho})$$

$$v_c\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\cdot\cancel{\sin 0^\circ} = 0$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_{k,rel}}$$

$$E_{k,rel} = \frac{1}{2}\int_m (\vec{\omega}\times\vec{\rho})^2\,dm$$

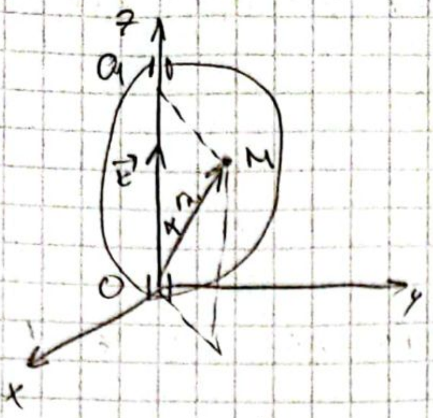
* транслаторно

$$\vec{\omega} = 0$$

$$E_{k,rel} = \frac{1}{2}\int \cancel{(\vec{\omega}\times\vec{\rho})^2\,dm} = 0$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v_c^2}$$

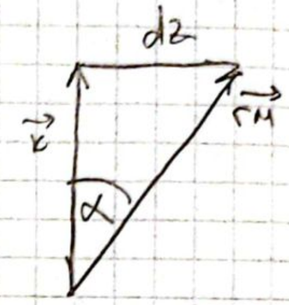
23. Кин. енергија крутог тела које се обрће око неп. осе



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega_z(\vec{k} \times \vec{r})$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \cdot \vec{k}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\int_m \vec{v} \cdot \vec{v}\, dm = \frac{1}{2}\omega_z^2 \int_m (\vec{k} \times \vec{r})\, dm$$

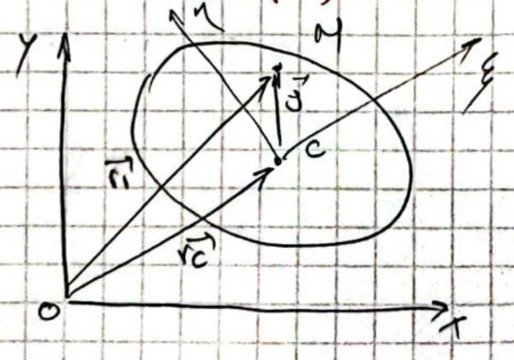


$$\vec{k} \times \vec{r} = \cancel{k}^{\,1}\, r \cos\angle(\vec{k}, \vec{r}) = r\cos\alpha = d_z$$

$$E_k = \frac{1}{2}\omega_z^2 \int_m d_z^2\, dm = \frac{1}{2}\omega_z^2 J_{Oz}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\omega_z^2 J_{Oz}}$$

24. Кин. енергија тела које врши равно кретање



$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_{k,rel}$$

$$E_{k\,rel} = \frac{1}{2}\int_m (\vec{\omega} \times \vec{\rho})^2\, dm$$

$$\vec{\rho} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu}$$

$$\vec{\omega} = \omega_\zeta \vec{\nu}$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{\rho})^2 = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \xi & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z \end{vmatrix}^2 = (\vec{\lambda}\,\eta\,\omega_z + \vec{\mu}\,\xi\,\omega_z)^2$$

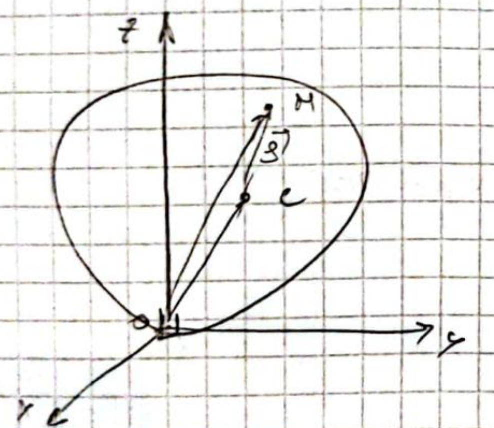
$$E_{k\,rel} = \frac{1}{2}\omega_z^2 \int_m (\vec{\lambda}\eta + \vec{\mu}\xi)^2 dm$$

$d_{c\zeta} = \vec{\lambda}\eta + \vec{\mu}\xi$ – растојање центра масе од осе $C\zeta$

$$E_{k\,rel} = \frac{1}{2}\omega_z^2 J_{c\zeta}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2}\omega_z^2 J_{c\zeta}$$

25. Кин. енерг. тела које се обрће око непокретне тачке



$$E_k = \frac{1}{2}\int_m V^2 dm = \frac{1}{2}\int_m (\vec{\omega}\times\vec{r})^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \int_m d_p^2 dm$$

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 J_p$$

J_p – момент инерције за осу O_p

$$V^2 = \vec{V}\cdot\vec{V} = \vec{V}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \vec{\omega}(\vec{r}\times\vec{V})$$

$$E_k = \frac{1}{2}\int_m \vec{\omega}(\vec{r}\times\vec{V})dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\int_m (\vec{r}\times\vec{V})dm$$

$$E_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L_O}$$

$$\vec{\omega} = \omega_\xi\vec{\lambda} + \omega_\eta\vec{\mu} + \omega_\zeta\vec{\nu}$$

$$\vec{L_O} = L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu}$$

$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_\xi L_{O\xi} + \omega_\eta L_{O\eta} + \omega_\zeta L_{O\zeta})$$

$$E_k = \frac{1}{2}\Big[\omega_\xi(\omega_\xi J_\xi - \omega_\eta J_{\xi\eta} - \omega_\zeta J_{\xi\zeta}) +$$
$$+ \omega_\eta(\omega_\eta J_\eta - \omega_\xi J_{\eta\xi} - \omega_\zeta J_{\zeta\eta}) +$$
$$+ \omega_\zeta(\omega_\zeta J_\zeta - \omega_\xi J_{\xi\zeta} - \omega_\eta J_{\eta\zeta})\Big]$$

$$E_k = \frac{1}{2}\Big[(\omega_\xi^2 J_\xi - \omega_\eta\omega_\xi J_{\xi\eta} - \omega_\zeta\omega_\xi J_{\xi\zeta}) +$$
$$+ (\omega_\eta^2 J_\eta - \omega_\eta\omega_\xi J_{\eta\xi} - \omega_\eta\omega_\zeta J_{\zeta\eta}) +$$
$$+ (\omega_\zeta^2 J_\zeta - \omega_\zeta\omega_\xi J_{\xi\zeta} - \omega_\eta\omega_\zeta J_{\eta\zeta})\Big]$$

све се поскрати:

$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_\xi^2 J_\xi + \omega_\eta^2 J_\eta + \omega_\zeta^2 J_\zeta)$$

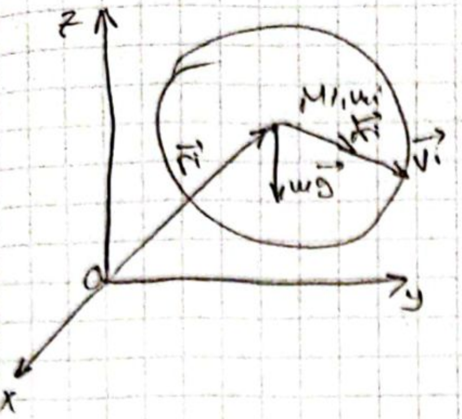
26. Кин. ен. тела које врши опште кретање

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{\nu}$$
$$\vec{J} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L_0}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2}(\omega_\xi^2 J_\xi + \omega_\eta^2 J_\eta + \omega_\zeta^2 J_\zeta - 2\omega_\xi\omega_\eta J_{\xi\eta} - 2\omega_\eta\omega_\zeta J_{\eta\zeta} - 2\omega_\xi\omega_\zeta J_{\xi\zeta}$$

27. Рад силе теже материјалног система



$$\delta A_i = m_i \vec{g}\, d\vec{r}_i$$

$$\vec{g} = (0,0,-g)$$

$$d\vec{r}_i = (dx_i, dy_i, dz_i)$$

$$\delta A_i^S = -m_i g \vec{k}\,(dx_i\vec{i} + dy_i\vec{j} + dz_i\vec{k})$$

$$\vec{k}\cdot\vec{i} = 0, \quad \vec{k}\cdot\vec{j} = 0, \quad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\delta A_i^S = -m_i g\, dz_i$$

$$\delta A^S = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i^S = \sum_{i=1}^{N} -m_i g\, dz_i$$

$$\delta A^S = -g \sum_{i=1}^{N} m_i\, dz_i$$

$$m\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} m\dfrac{dz_C}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \dfrac{dz_i}{dt} \quad /\cdot dt \\ m\, dz_C = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\, dz_i \end{cases}$$

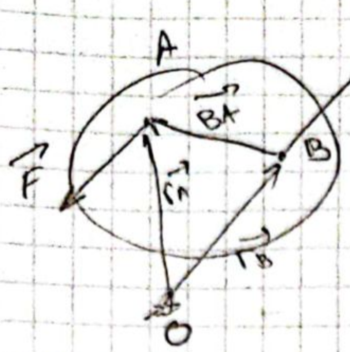
$$\delta A^S = -g\, m\, dz_C \quad /\int$$

$$A^S = -g m \int_{M_1}^{M_2} dz_C$$

$$A^S = -gm(z_2 - z_1)$$ ако $z_2 < z_1 \Rightarrow z_2 - z_1 < 0 \rightarrow A^S > 0$

$$\boxed{A^S(m\vec{g}) = mg(z_1 - z_2)}$$

28. Рад спрега сила



$$\vec{F} = -\vec{F'}$$

$$\delta A^s = \delta A^s(\vec{F}) + \delta A^s(\vec{F'})$$

$$\delta A^s(\vec{F}) = \vec{F} d\vec{r_A}$$

$$\delta A^s(\vec{F'}) = \vec{F'} d\vec{r_B} = -\vec{F} d\vec{r_B}$$

$$\delta A^s = \vec{F}(d\vec{r_A} - d\vec{r_B})$$

$$d\vec{r_A} = \vec{V_A} dt$$
$$d\vec{r_B} = \vec{V_B} dt$$

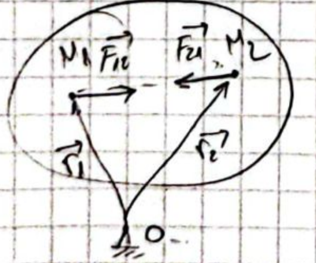
$$\delta A^s = \vec{F} dt (\vec{V_A} - \vec{V_B})$$

$$\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{V_A^B}$$
$$\vec{V_A} - \vec{V_B} = \vec{V_A^B} = \vec{\omega} \times \vec{BA}$$

$$\delta A^s = \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{BA}) dt$$
$$\delta A^s = \vec{\omega}(\vec{BA} \times \vec{F}) dt$$
$$\delta A^s = \vec{\omega}\, \vec{M}\, dt$$

$$\delta A^s(\vec{M}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M} dt$$

29. Рад унутрашњих сила изменљивог и неизменљивог мат. сист



$$\vec{F_{12}^u} = -\vec{F_{21}^u}$$

$$\delta A^u = \delta A^u(\vec{F_{21}^u}) + \delta A^u(\vec{F_{12}^u})$$

$$\delta A^u = \vec{F_{12}^u}(dr_1 - dr_2)$$

$$\vec{M_1M_2} = \overline{M_1M_2}\, \vec{r_0}$$

$$\vec{r_1} - \vec{r_2} = \overline{M_1M_2}\, \vec{r_0} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\underbrace{d\vec{r_1} - d\vec{r_2} = d\, \overline{M_1M_2}\, \vec{r_0} + \overline{M_1M_2}\, d\vec{r_0}}$$

$$\delta A^{u} = \vec{F_{12}}^{u} \left(d\overline{M_1M_2} \cdot \vec{r_0} + \cancel{\overline{M_1M_2}\, d\vec{r_0}} \right)$$

$$\vec{r_0}\,\vec{r_0} = 1$$

$$d\vec{r_0}\,\vec{r_0} + \vec{r_0}\,d\vec{r_0} = 0 \qquad 2\vec{r_0}\,d\vec{r_0} = 0$$

$d\vec{r_0}\,\vec{r_0} = 0$, да би важило

мора $d\vec{r_0} \perp \vec{r_0} \Rightarrow \vec{F_{12}}^{u} \perp d\vec{r_0}$ јер $\vec{F_{12}}^{u} = F_{12}^{u}\vec{r_0}$

$$\delta A^{u} = \vec{F_{12}}^{u}\,\vec{r_0}\, d(\overline{M_1M_2})$$

1) неизмењиво (крутo тело)

$\overline{M_1M_2} = const$

$d(\overline{M_1M_2}) = 0$

$\delta A^{u} = 0$

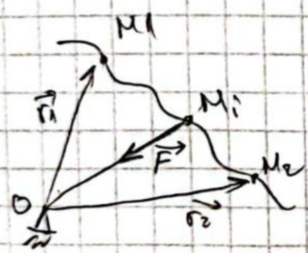
2) изменљиво

$\overline{M_1M_2} \neq const$

$\delta A^{u} \neq 0$

Privatni časovi

30. Рад централне силе



$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F}\,d\vec{r}$$

$$A(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\,d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F(r)\,\vec{r_0} = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{r}\,\vec{r} = r^2$

$\vec{r}\,d\vec{r} = r\,dr$

$$A(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} F\,\frac{\vec{r}}{r}\,d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F\,\frac{1}{\cancel{r}}\,\cancel{r}\,dr$$

$$A(\vec{F}) = \int_{r_1}^{r_2} F\,dr$$

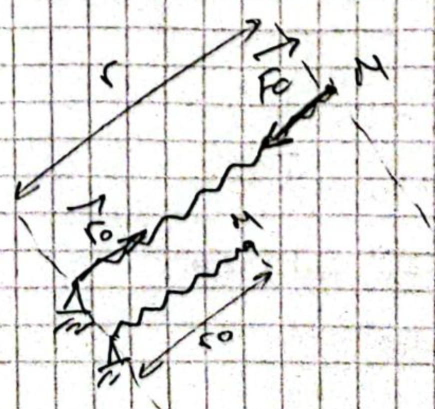
* примена

- сила еластичности

- сила у опрузи

$$F_c = c\Delta l = c(l - l_0)$$

$$\vec{F_c} = -c\,(l - l_0)\,\vec{r_0} = -c\,(l - l_0)\,\frac{\vec{r}}{r}$$

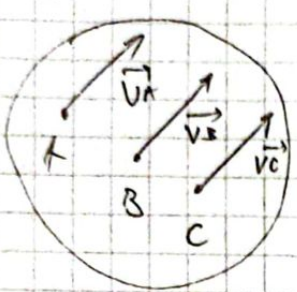


$$A(\vec{F_c}) = \int_{r_1}^{r_2} -c(r-r_0)\,dr$$

$$A(\vec{F_c}) = -\frac{c}{2}(r-r_0)^2\Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$\boxed{A(\vec{F_c}) = \frac{c}{2}(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2)}$$

31. Рад сила при транслаторном кретању



$$\vec{V_A} = \vec{V_B} = \dots = \vec{V_N} = \vec{V}$$

$$\vec{a_A} = \vec{a_B} = \dots = \vec{a_N} = \vec{a}$$

$$d\vec{r_A} = d\vec{r_B} = \dots = d\vec{r_N} = d\vec{r}$$

$$\delta A_i^S = \vec{F_i}\,d\vec{r}$$

$$\delta A^S = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}\,d\vec{r}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i^S} = \vec{F_R^S}$$

$$\delta A^S = \vec{F_R^S}\,d\vec{r}$$

$$\boxed{A^S = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F_R^S}\,d\vec{r}}$$

32. Рад сила трења клизања

$$\delta A^\mu = \delta A^\mu(\vec{F_{\mu A}}) + \delta A^\mu(\vec{F_{\mu B}})$$

$$\vec{F_{\mu A}} = -\vec{F_{\mu B}}$$

$$\delta A^\mu = \vec{F_{\mu A}}(d\vec{r_A} - d\vec{r_B})$$

$$\delta A^\mu = \vec{F_\mu}(\vec{V_A} - \vec{V_B})\,dt$$

$$\delta A^\mu = \vec{F_\mu}\,\vec{V_{rel}}\,dt$$

$$\delta A^\mu = -F_\mu V_{rel}\,dt$$

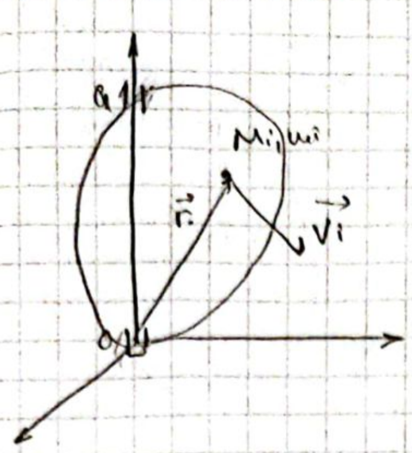
$$\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{V_{rel}}$$

$$\vec{V_A} - \vec{V_B} = \vec{V_{rel}}$$

$$\sphericalangle(\vec{F_\mu}, \vec{V_{rel}}) = 180^\circ$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

33. Рад сила при обртању тела око непокретне осе



$$\delta A_i^s = \vec{F_i} d\vec{r_i}$$

$$\delta A^s = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^s = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} d\vec{r_i}$$

$$\delta A^s = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \vec{V_i} dt$$

$$\vec{V_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i}$$

$$\delta A^s = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) dt$$

$$= \sum \vec{\omega} (\vec{r_i} \times \vec{F_i}) dt$$

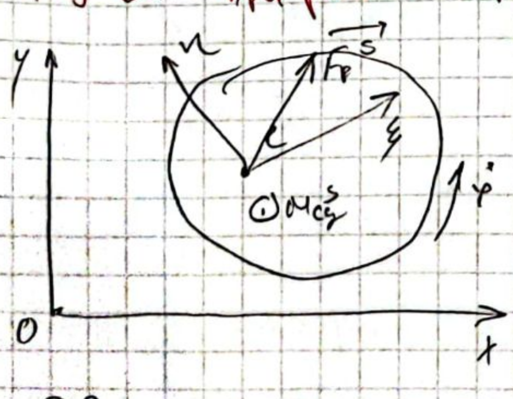
$$dA^s = \sum \vec{\omega} \vec{M_i}^s dt$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\delta A^s = \vec{M}^s d\varphi}$$

$$A^s = M^s \Delta\varphi$$

34. Рад сила при равном кретању тела



$$(\vec{F_1}', \vec{F_2}', \vec{F_3}' \ldots \vec{F_n}') \sim F_R'$$

$$(\vec{M_1}(\vec{F_1}), \vec{M_2}(\vec{F_2}), \ldots \vec{M_n}(\vec{F_n})) \sim M_{cq}^s$$

$$\vec{\omega} = \omega_{cq} \vec{\nu}$$

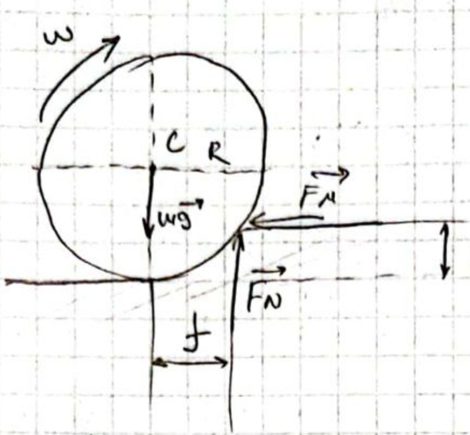
$$\vec{M_c}^s = M_{cq}^s \vec{\nu}$$

$$\delta A^s = \delta A^s(\vec{F_R}^s) + \delta A^s(M_{cq}^s)$$

$$\delta A^s = \vec{F_R}^s d\vec{r_i} + \vec{M}_{cq}^s d\varphi$$

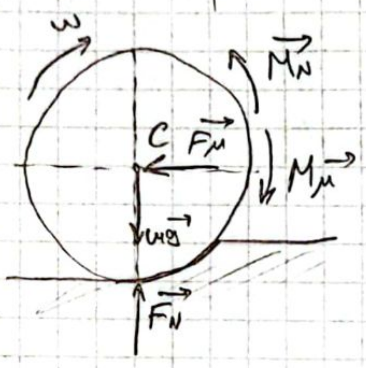
Privatni časovi

35. Рад спољашњих сила при котрљању без клизања по непокретној храпавој подлози



f_1 - занемарује се

$f_1 \approx 0$



$$M_N = N \cdot f$$

$$\delta A(\vec{N}) = \delta A(\vec{F_N}) + \delta A(\vec{M_N})$$

$$\delta A(\vec{F_N}) = \cancel{\vec{F_N} d\vec{r}}^{\,0} = 0$$

$$\vec{F_N} \perp d\vec{r}$$

$$\delta A(\vec{M_N}) = -Nf\,d\varphi$$

$$\delta A(\vec{F_\mu}) = \delta A(\vec{F_\mu}) + \delta A(\vec{M_\mu})$$

$$M_\mu = -F_\mu R$$

$$\delta A(\vec{F_\mu}) = \vec{F_\mu} d\vec{r} + M_\mu d\varphi$$

$$V_C = R\dot{\varphi} = \dot{x}_C \rightarrow x_C = R d\varphi$$

$$\delta A = \vec{F_\mu} dx_C - F_\mu R d\varphi$$

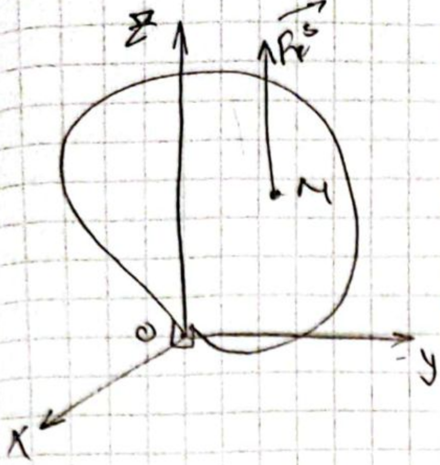
$$\delta A(\vec{F_\mu}) = F_\mu R d\varphi - F_\mu R d\varphi$$

$$\delta A(\vec{F_\mu}) = 0$$

$$\int_1^2 \delta A(\vec{N}) = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N \cdot f\,d\varphi$$

$$\boxed{A_{12}(\vec{N}) = -Nf\Delta\varphi}$$

36. Рад сила при сферном кретању тела



$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i^s} = \vec{F_R^s}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^O(\vec{F_i}) = \vec{M_O^s}$$

* ако на тело делује систем сила чија је резултанта $\vec{F_R^s}$, паралелним преношењем у тачку O добијамо $(\vec{F_R^s}, \vec{M_O^s})$

* пошто је тачка O непокретна, $d\vec{r_O} = 0$

$$\delta A(\vec{F_i^s}) = \vec{F_R^s}\, d\vec{r_O} = 0$$

$$\delta A^s = \delta A(\vec{M_O^s}) = M_O^s\, d\alpha$$

* угаона брзина није извод по времену α већ функција три Ојлерова угла.

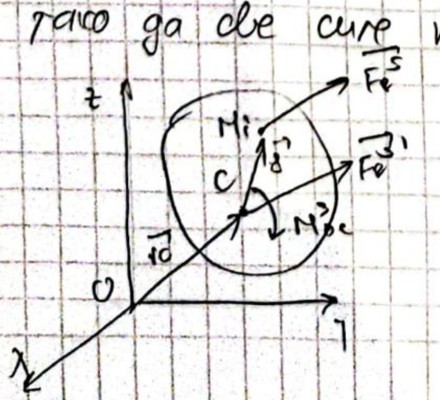
$$\vec{M_O^s} = M_{O\xi}^s \vec{\lambda} + M_{O\eta}^s \vec{\mu} + M_{O\zeta}^s \vec{\nu}$$

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{\nu}$$

$$\delta A^s = \vec{M_O^s} \cdot \vec{\omega}\, dt = (M_{O\xi}^s \omega_\xi \vec{\lambda} + M_{O\eta}^s \omega_\eta \vec{\mu} + M_{O\zeta}^s \omega_\zeta \vec{\nu})\, dt$$

37. Рад сила при општем кретању

* може се посматрати као сферно кретање али до тачке C тако да све силе преносимо у тачку C



$$\delta A^s = \vec{F_R^s}\, d\vec{r_C} + \vec{M_C^s}\, \vec{\omega}\, dt$$

38. Теорема о промени кин. ен. мат. система и крутог тела

$$m_i \vec{a_i} = \vec{F_i^u} + \vec{F_i^s}$$

$$m_i \frac{d\vec{V_i}}{dt} = \vec{F_i^u} + \vec{F_i^s} \quad / \cdot d\vec{r_i}$$

$$m_i d\vec{V_i} \vec{V_i} = \vec{F_i^u} d\vec{r_i} + \vec{F_i^s} d\vec{r_i}$$

$$\vec{V_i} d\vec{V_i} = V dV = \frac{1}{2} d(V^2)$$

$$\frac{1}{2} m_i dV^2 = \delta A(\vec{F_i^u}) + \delta A(\vec{F_i^s})$$

$$d\left(\frac{1}{2} m_i V_i^2\right) = dE_k$$

$$dE_k = \delta A^u + \delta A^s$$

$$\boxed{E_{k_2} - E_{k_1} = A^u_{12} + A^s_{12}}$$

+ Прираштај кинетичке енергије једнак је збиру рада спољашњих и унутрашњих сила

- У случају крутог тела, непроменљив мат. систем

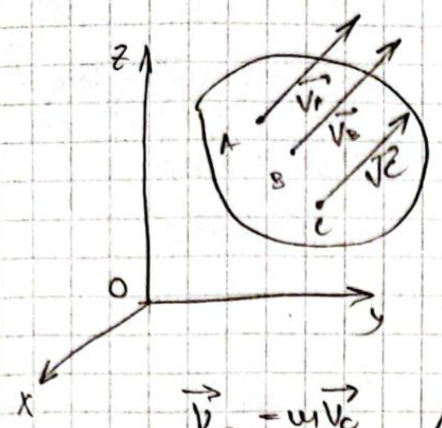
$$A^u = 0$$

$$dE_k = \delta A^s$$

$$\boxed{E_{k_2} - E_{k_1} = A^s}$$

II област

39. Диф. јне транслаторног кретања тела



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a}$$

$$\vec{K}_C = m\vec{v}_C \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = m\vec{a}_C = \vec{F}_R^S$$

$$m\ddot{x}_C = X_R^S$$

$$m\ddot{y}_C = Y_R^S$$

$$m\ddot{z}_C = Z_R^S$$

$$\vec{\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$$

$$\vec{L}_C = \int_m \vec{\rho} \times \underbrace{\cancel{(\vec{\omega} \times \vec{\rho})}}_{0} dm$$

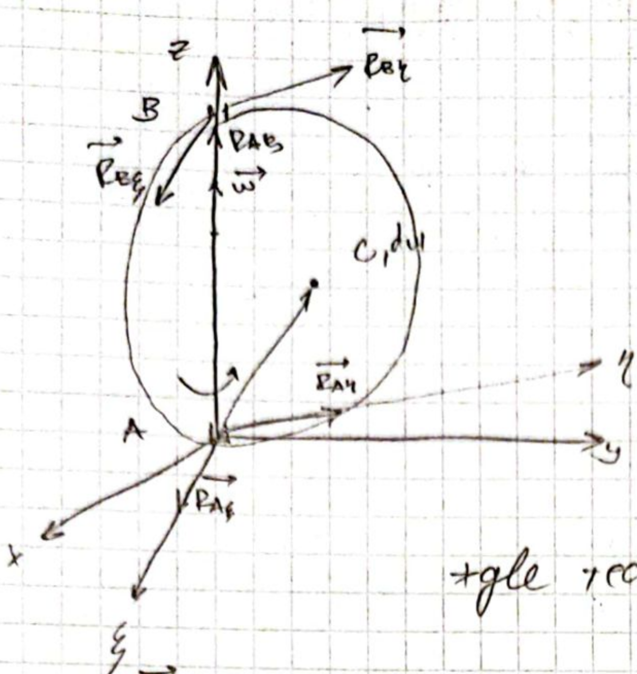
$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\cancel{\vec{v}_C \times m\vec{v}_C}}_{0} + \vec{r}_C \times m\vec{a}_C = \vec{M}_C^S$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{M}_C^S = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{C\xi}^S = 0 \\ M_{C\eta}^S = 0 \\ M_{C\zeta}^S = 0 \end{array}\right\} \text{ додатни услови компатибилности}$$

40. Диф. јне обртања тела око неп. осе



$\vec{R_A} = R_{A\xi}\vec{\lambda} + R_{A\eta}\vec{\mu} + R_{A\zeta}\vec{\nu}$

$\vec{R_B} = R_{B\xi}\vec{\lambda} + R_{B\eta}\vec{\mu}$

$\vec{\omega} = \omega_{\zeta}\vec{\nu} = \dot{\varphi}\vec{\nu}$

$\varphi = \varphi(t)$

+gle горење

1) $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F_R^s} = m\vec{a_C}$

$\vec{a_C} = \vec{a_{CN}} + \vec{a_{CT}}$

$\vec{r_C} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}$

$\vec{F_R^s} = \vec{F_R^a} + \vec{R_A} + \vec{R_B}$

$\vec{a_{CN}} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\times\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(-\dot{\varphi}\eta) + \vec{\mu}(-\dot{\varphi}\xi)$$

$$\vec{a_{CN}} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ -\dot{\varphi}\eta & -\dot{\varphi}\xi & 0 \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(\dot{\varphi}^2\xi) + \vec{\mu}(\dot{\varphi}^2\eta)$$

$\vec{a_{CN}} = \dot{\varphi}^2(\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu})$

$$\vec{a_{CT}} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(-\ddot{\varphi}\eta) + \vec{\mu}(-\ddot{\varphi}\xi)$$

$\vec{a_{CT}} = -\ddot{\varphi}(\eta\vec{\lambda} + \xi\vec{\mu})$

$$\vec{a_C} = \vec{\lambda}\left(-\dot{\varphi}^2\xi - \ddot{\varphi}\eta\right) + \vec{\mu}\left(-\dot{\varphi}^2\eta - \ddot{\varphi}\xi\right)$$

$$m\left(-\dot{\varphi}^2\xi - \ddot{\varphi}\eta\right) = F_{p\xi}^a + R_{A\xi} + R_{B\xi} \quad \ldots (1)$$

$$m\left(-\dot{\varphi}^2\eta - \ddot{\varphi}\xi\right) = F_{p\eta}^a + R_{A\eta} + R_{B\eta} \quad \ldots (2)$$

$$0 = F_{p\zeta}^a + R_{A\zeta} \quad \ldots (3)$$

2) $$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \vec{M_R^s} = \vec{M_R}(\vec{F_R^a}) + \cancel{\vec{M_R}(\vec{R_A})}^{\,0} + M_R(\vec{R_B})$$

$$\vec{M_R}(\vec{R_A}) = \vec{r_A} \times \vec{R_A}, \quad \vec{r_A} = 0 \Rightarrow \vec{M_R}(\vec{R_A}) = 0$$

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \vec{M_R}(\vec{F_R^a}) + \vec{M_R}(\vec{R_B})$$

$$\vec{M_R}(\vec{R_B}) = \vec{r_B} \times \vec{R_B} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & l \\ R_{B\xi} & R_{B\eta} & 0 \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(-R_{B\eta} l) + \vec{\mu}(-R_{B\xi} l)$$

$$\vec{M_R}(\vec{F_p^a}) = M_{R\xi}^a \vec{\lambda} + M_{R\eta}^a \vec{\mu} + M_{R\zeta}^a \vec{\nu}$$

$$\vec{L_A} = \int_m \vec{r} \times \vec{v}\, dm = \int_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm = \int_m \vec{\omega}(\vec{r}\,\vec{r})\, dm - \int_m \vec{r}(\vec{\omega}\,\vec{r})\, dm$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{r}\,\vec{r} = r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

$$\vec{\omega}\,\vec{r} = \omega r \cos\angle(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega \cdot \zeta, \quad r\cos\angle(\vec{\omega}, \vec{r}) = \zeta$$

$$\vec{L_A} = \int_m \omega_\zeta \vec{\nu}(\xi^2 + \eta^2 + \cancel{\zeta^2})\, dm - \int_m \omega_\zeta(\xi\zeta\vec{\lambda} + \eta\zeta\vec{\mu} + \cancel{\zeta^2\vec{\nu}})\, dm$$

$$\vec{L_A} = \omega_\zeta \vec{\nu} \int_m (\xi^2 + \eta^2)\, dm - \omega_\zeta \int_m \xi\zeta\vec{\lambda}\, dm - \omega_\zeta \int_m \eta\zeta\vec{\mu}\, dm$$

$$\vec{L_A} = \omega_\zeta J_{c\zeta} \vec{\nu} - \omega_\zeta J_{\xi\zeta} \vec{\lambda} - \omega_\zeta J_{\eta\zeta} \vec{\mu}$$

$J_{\xi\zeta}, J_{\eta\zeta} = const$

$$\vec{L}_A = \dot{\varphi} J_{C\zeta}\vec{\nu} - \dot{\varphi} J_{\xi\zeta}\vec{\lambda} - \dot{\varphi} J_{\eta\zeta}\vec{\mu} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega}\times\vec{\lambda} = \dot{\varphi}(\vec{\nu}\times\vec{\lambda}) = \dot{\varphi}\vec{\mu}$$

$$\dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega}\times\vec{\mu} = \dot{\varphi}(\vec{\nu}\times\vec{\mu}) = -\dot{\varphi}\vec{\lambda}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \ddot{\varphi} J_{C\zeta}\vec{\nu} - J_{\xi\zeta}(\ddot{\varphi}\vec{\lambda} + \dot{\varphi}^2\vec{\mu}) - J_{\eta\zeta}(\ddot{\varphi}\vec{\mu} - \dot{\varphi}^2\vec{\lambda})$$

пишемо диф. јне

$$-J_{\xi\zeta}\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} = M_{R\xi}^a - R_{B\eta} h \quad \dots (4)$$

$$-J_{\xi\zeta}\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi} J_{\eta\zeta} = M_{R\eta}^a + R_{B\xi} h \quad \dots (5)$$

$$\ddot{\varphi} J_{C\zeta} = M_{R\zeta}^a \quad \dots (6)$$

1) $M_{A\zeta}^a > 0$, $\ddot{\varphi} > 0$, обртање је убрзано

2) $M_{A\zeta}^a < 0$, $\ddot{\varphi} < 0$, обртање је успорено

3) $M_{A\zeta}^a = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, обртање је равномерно

41. Одређивање дин. реакција у лежиштима тела које се обрће око непокретне осе. Услови дин. рав.

Полазимо од једн.

$$-m\ddot{\varphi}\eta - m\dot{\varphi}^2\xi = F_{R\xi}^a + R_{A\xi} + R_{B\xi} \quad (1)$$

$$m\ddot{\varphi}\xi - m\dot{\varphi}^2\eta = F_{R\eta}^a + R_{A\eta} + R_{B\eta} \quad (2)$$

$$0 = F_{R\zeta}^a + R_{A\zeta} \quad (3)$$

$$-J_{\xi\zeta}\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} = M_{R\xi}^a - R_{B\eta} h \quad (4)$$

$$-J_{\xi\zeta}\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi} J_{\eta\zeta} = M_{R\eta}^a + R_{B\xi} h \quad (5)$$

$$\ddot{\varphi} J_{C\zeta} = M_{A\zeta}^a \quad (6)$$

* тардје вани

$R_{A\xi} = R_{A\xi}^{ST} + R_{A\xi}^{D}$, $R_{A\eta} = R_{A\eta}^{ST} + R_{A\eta}^{D}$, $R_{A\zeta} = R_{A\zeta}^{ST} + R_{A\zeta}^{D}$

$R_{B\xi} = R_{B\xi}^{ST} + R_{B\xi}^{D}$, $R_{B\eta} = R_{B\eta}^{ST} + R_{B\eta}^{D}$

статика, $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = F_{R\xi}^{a} + R_{A\xi}^{ST} + R_{B\xi}^{ST} \quad (1)$$

$$0 = F_{R\eta}^{a} + R_{A\eta}^{ST} + R_{B\eta}^{ST} \quad (2)$$

$$0 = F_{R\zeta}^{a} + R_{A\zeta}^{ST} \quad (3)$$

$$0 = M_{A\xi}^{a} - R_{B\eta}^{ST} l_1 \quad (4)$$

$$0 = M_{A\eta}^{a} + R_{B\xi}^{ST} l_1 \quad (5)$$

динамика $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi} \neq 0$ $F_R^a = 0$, $M_A^a = 0$

$$-m\ddot{\varphi}\eta - m\dot{\varphi}^2\xi = R_{A\xi}^{D} + R_{B\xi}^{D} \quad (1)$$

$$+m\ddot{\varphi}\xi - m\dot{\varphi}^2\eta = R_{A\eta}^{D} + R_{B\eta}^{D} \quad (2)$$

$$0 = R_{A\zeta}^{D} \quad (3)$$

$$-J_{\xi\zeta}\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} = -R_{B\eta}^{D} l_1 \quad (4)$$

$$-J_{\xi\zeta}\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi} J_{\eta\zeta} = R_{B\xi}^{D} l_1 \quad (5)$$

-услов дин. рав.

$$R_{A\xi}^{D} = R_{A\eta}^{D} = R_{A\zeta}^{D} = R_{B\xi}^{D} = R_{B\eta}^{D} = 0$$

$$-m\ddot{\varphi}\eta - m\dot{\varphi}^2\xi = 0 \quad (1)$$

$$m\ddot{\varphi}\xi - m\dot{\varphi}^2\eta = 0 \quad (2)$$

$$-J_{\xi\zeta}\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} = 0 \quad (4)$$

$$-J_{\xi\zeta}\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi} J_{\eta\zeta} = 0 \quad (5)$$

$\begin{vmatrix} \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \\ -\ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 \end{vmatrix} \neq 0$ једино решење $\eta_c = \xi_c = 0$

$J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$

42. Диф. jне равног кретања тела

$$\vec{F_R^s} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i^s}$$

$$m\vec{a_c} = \vec{F_R^s} = \frac{d\vec{K}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L_c}}{dt} = \vec{M_c^s}$$

$$m\ddot{x}_c = X_R^s \qquad \frac{dL_{c\xi}}{dt} = M_{c\xi}^s$$

$$m\ddot{y}_c = Y_R^s \qquad \frac{dL_{c\eta}}{dt} = M_{c\eta}^s$$

$$m\ddot{z}_c = Z_R^s \qquad \frac{dL_{c\zeta}}{dt} = M_{c\zeta}^s$$

$\ddot{z}_c = 0$ јер је у равни

$$J_{c\zeta}\ddot{\varphi} = M_{c\zeta}^s$$

$$0 = Z_R^s \;,\quad 0 = M_{c\xi}^s \;,\quad 0 = M_{c\eta}^s$$

$$m\ddot{x}_c = X_R^s \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_c = Y_R^s \quad (2)$$

$$J_{c\zeta}\ddot{\varphi} = M_{c\zeta}^s \quad (3)$$

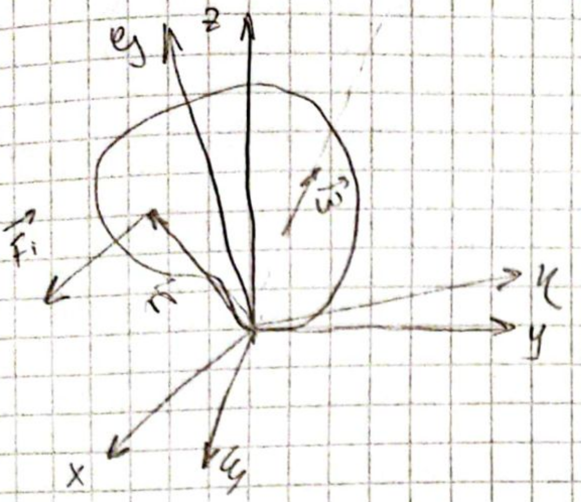
природни триедар

$$m a_{c\tau} = m\frac{dv_t}{dt} = F_{R\tau}^s$$

$$m a_{cN} = m\frac{v^2}{R_K} = F_{RN}^s$$

$$J_{c\zeta}\ddot{\varphi} = M_{c\zeta}^s$$

43. Диф.ј-не сферног кретања тела



$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M_O}^S = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

$$\vec{L_O} = L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu}$$

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \frac{d_r\vec{L_O}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L_O}$$

$$\frac{dL_{O\xi}}{dt} + (\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}) = M_{O\xi}^S$$

$$\frac{dL_{O\eta}}{dt} + (\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}) = M_{O\eta}^S$$

$$\frac{dL_{O\zeta}}{dt} + (\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}) = M_{O\zeta}^S$$

$$J_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + (J_\zeta - J_\eta)\omega_\eta \omega_\zeta = M_{O\xi}^S$$

$$J_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + (J_\xi - J_\zeta)\omega_\xi \omega_\zeta = M_{O\eta}^S$$

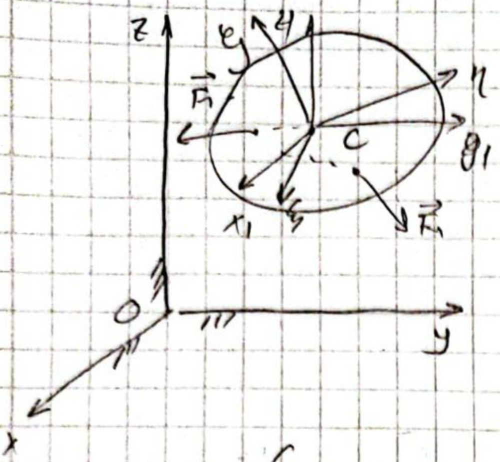
$$J_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + (J_\eta - J_\xi)\omega_\xi \omega_\eta = M_{O\zeta}^S$$

$$\omega_\xi = \omega_\xi(t), \quad \omega_\eta = \omega_\eta(t), \quad \omega_\zeta = \omega_\zeta(t)$$

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

44. Диф. ј-не ~~тачке~~ тела које врши опште кретање

- Када тело заузима било где положај у простору



Потребно је познавати кретање тачке C, преко x_C, y_C, z_C и кретање $O_{\xi\eta\zeta}$ у односу на $O_{x_1 y_1 z_1}$ да би потпуно описали кретање.

- има 6 степени слободе
- користимо обе теореме

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \vec{F}_R^s \quad , \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^s$$

где су $\vec{F}_R^s, \vec{M}_C^s$, главни вектор и главни момент спољ. сила.

$$m\ddot{x}_C = X_R^s \qquad \frac{dL_{C\xi}}{dt} + (\omega_\eta L_{C\zeta} - \omega_\zeta L_{C\eta}) = M_{C\xi}^C$$

$$m\ddot{y}_C = Y_R^s \qquad \frac{dL_{C\eta}}{dt} + (\omega_\zeta L_{C\xi} - \omega_\xi L_{C\zeta}) = M_{C\eta}^C$$

$$m\ddot{z}_C = Z_R^s \qquad \frac{dL_{C\zeta}}{dt} + (\omega_\xi L_{C\eta} - \omega_\eta L_{C\xi}) = M_{C\zeta}^S$$

$$x_C = x_C(t) \qquad \psi = \psi(t)$$

$$y_C = y_C(t) \qquad \theta = \theta(t)$$

$$z_C = z_C(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$$

46. Генералисане координате. Генералисане брзине

$q_j \, , \quad j = [1, s]$

s - бр. степени слободе

→ холономне нестационарне, задржавајуће везе

$f = f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$

$x_i = x_i(q_1, q_2 \dots q_s, t)$ $\qquad x_i = x_i(q_j, t)$

$y_i = y_i(q_1, q_2 \dots q_s, t)$ $\qquad y_i = y_i(q_j, t)$ $\qquad j = [1, s]$

$z_i = z_i(q_1, q_2 \dots q_s, t)$ $\qquad z_i = z_i(q_j, t)$

$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1, q_2 \dots q_s, t)$ $\qquad \vec{r_i} = \vec{r_i}(q_j, t)$

→ ако су везе стационарне

$x_i = x_i(q_j)$ $\qquad f = f(x_i, y_i, z_i)$ $\qquad i = 1, \dots n,$

$y_i = y_i(q_j)$

$z_i = z_i(q_j)$ $\qquad j = 1 \dots s$

$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_j)$

-брзине - нестационарне $q_j(t)$

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$$

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_j, t)$$

$$\vec{V_i} = \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r_2}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r_n}}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{V_i} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}}$$

→ за стационарне - нису ф-је од времена

$$\vec{V_i} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\dot{q}_j \qquad j = 1 \dots s \qquad i = 1 \dots n$$

$$\vec{v_i} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \dot{q_j}$$

$$\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial \dot{q_j}} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$$

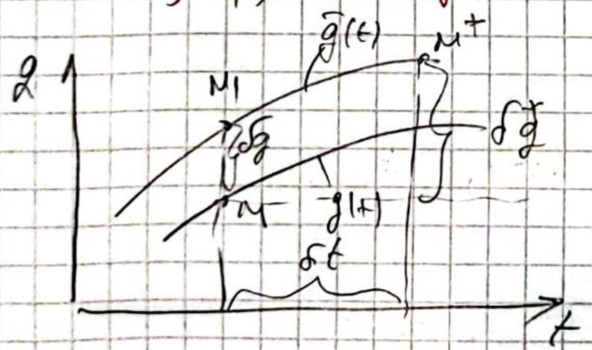
$$\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{r_i}\right) \quad \vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k}\dot{q_k} + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^{s}\frac{\partial^2 \vec{r_i}}{\partial q_s \partial q_j}\dot{q_s} + \frac{\partial^2 \vec{r_i}}{\partial q_j \partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r_i}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right)$$

46. Варијација координата



$$\bar{q}(t) = q(t) + \varepsilon \eta(t)$$

δq - варијација $q(t)$

$$\delta q = \bar{q}(t) - q(t) = \varepsilon \eta(t)$$

$\delta t = 0 \rightarrow$ синхрона варијација

$$\delta \dot{q} = \dot{\bar{q}}(t) - \dot{q}(t) = \frac{d}{dt}(\delta q)$$

$\delta\left(\frac{d}{dt}q\right) = \frac{d}{dt}(\delta q)$ - комутативност операција δ и d/dt

$$\delta^* g = \delta g + \dot{g}\delta t$$

47. Виртуелна померања холономних система

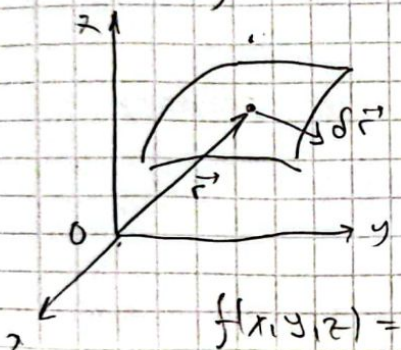
* Стварна померања представљају промену положаја тачке током времена, по стварним путањама
* Виртуелна померања мат. сист. су замишљена, бесконачно мала померања која допуштају везе

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ – стварно померање

$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$ – виртуелно померање

* стац. везе:

$$f(x, y, z) = 0$$



–тачка се креће у дило ком правцу тангентног на дод. површ

$$f(x, y, z) = 0$$

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$$

$$-\|- \approx \cancel{f(x, y, z)} + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

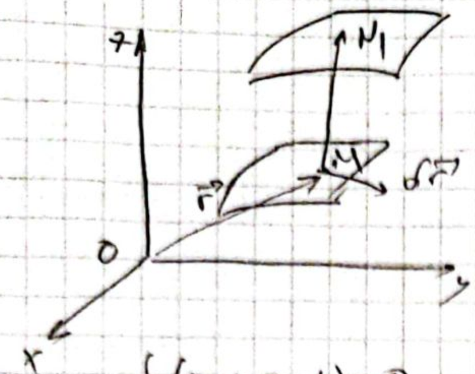
$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = \mathrm{grad} f \, \delta\vec{r} = 0$$

да би било нула $\vec{n} \perp \vec{r}$, ако су управни, значи да се тачка креће по тангенти, стварно померање

$$\delta\vec{r} = d\vec{r}$$

* Нестац. везе

$$\delta\vec{r} \neq d\vec{r}$$



$$f(x,y,z,t)=0$$

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t)=0$$

$$-\parallel- \approx \cancel{f(x,y,z,t)} + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f}{t} = 0$$

$$\operatorname{grad} f\, \delta\vec{r} = -\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$$

значи да $\delta\vec{r} \neq \perp \vec{n}$

– стварно померање није у танг. равни и не поклапа се са виртуелним

$$\boxed{\delta\vec{r_i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j}$$

48. Рад сила на виртуелном померању

$$\delta A_i = \vec{F_i}\delta\vec{r_i}$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N}\delta A_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}\delta\vec{r_i}$$

* идеалне везе су оне код којих је збир радова реакција веза на виртуелном померању једнак нули

$$\delta A_i = \vec{F_{Ni}}\delta\vec{r_i} = 0$$

+ реалне везе $\vec{F_{wi}} = \vec{F_{Ni}} + \vec{F_{\mu i}}$

$$\delta A_i = \cancel{\vec{F_{Ni}}\,\delta\vec{r_i}} + \vec{F_{\mu i}}\,\delta\vec{r_i}$$

0

$$\delta A_i = \vec{F_{\mu i}}\,\delta\vec{r_i} \neq 0$$

49. Генералисана сила

$$\delta A_i = \vec{F_i}\,\delta\vec{r_i} = \vec{F_i}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$\delta A = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}}_{Q_j}\delta q_j$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}$$

– генералисана сила

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j\,\delta q_j$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

50. Лагранжев принцип вирт. померања. Општа једн. статике

+ Равнотежно стање мат. сист. је оно стање када се систем у њему нађе, онда у њему и остаје

+ Да би се систем изложен дејству идеалних холономних стационарних и задржавајућих веза налазио у равнотежи, потребно је и довољно да рад сила буде = 0 на виртуелном померању

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i^a}\,\delta\vec{r_i} = \delta A = 0$$

* доказ потребности

$$\underbrace{m_i\vec{a_i}}_{0} = \vec{F_i^a} + \vec{N_i} = 0 \quad /\cdot d\vec{r_i}$$

$$\vec{F_i^a}\, dr_i + \underbrace{\vec{N_i}\, dr_i}_{0} = 0$$

$$N_i \perp dr_i = 0$$

$$\vec{F_i^a}\, dr_i = 0 \quad /\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i^a}\,\vec{dr_i} = 0 = dA$$

* доказ довољности

– кажемо да важи $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i^a}\, d\vec{r_i} = 0$

– претпоставимо супротно

$$\underbrace{m_i\vec{a_i}}_{0} = \vec{F_i^a} + \vec{N_i} \neq 0$$

$$\vec{F_i^a} + \vec{N_i} \neq 0 \quad /\cdot d\vec{r_i}$$

$$\vec{F_i^a}\, d\vec{r_i} + \underbrace{\vec{N_i}\, d\vec{r_i}}_{0} \neq 0$$

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i^a}\, d\vec{r_i} \neq 0$ * у исто време не може да важи

где претпоставка тако да важи $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i^a}\, d\vec{r_i} = 0$

Сада важи и

$$\delta A = 0 = \sum_{j=1}^{s} Q_j^a\, \delta q_j$$

$$Q_1^a \delta q_1 = Q_2^a \delta q_2 = \dots = Q_s^a \delta q_s = 0$$

$$Q_j^a q_j = 0$$

51. Лагранж 2 врсте

- систем подвргнут идеалним, холономним, нестационарним задрживајућим везама

$$\vec{v_i} = \sum \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\dot{q_j} + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i}\,\vec{v_i} = E_k(q_j, \dot{q_j}, t)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q_j}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q_j}}(\vec{v_i}\,\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i}\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial \dot{q_j}}$$

$$\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial \dot{q_j}} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q_j}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q_j}}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a_i}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d r_i}{dt}\right)}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i}\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d r_i}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q_j}}\right) = \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{N}(\vec{F_i}^a + \cancel{\vec{N_i}})\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^a \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q_j}}\right) = \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + Q_j^a$$

$$\boxed{Q_j^a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q_j}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j}}$$

52. Кин. ен. мат. сист. у генерал. коорд.

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_i \left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_i \left[\left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1}\dot{q}_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 \vec{r_i}}{\partial q_{s-1}\partial q_s}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s + 2\frac{\partial^2 \vec{r_i}}{\partial q_s \partial t}\dot{q}_s + \left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}\right)^2\right]$$

уводимо коеф.

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{4} m_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k}$$

$$b_k = \sum m_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}$$

$$C_0 = \sum m_i \left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}\right)^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{s} b_k\dot{q}_k + \frac{1}{2}C_0}$$

+ кода су стационарне везе $b_k = 0$ $C_0 = 0$

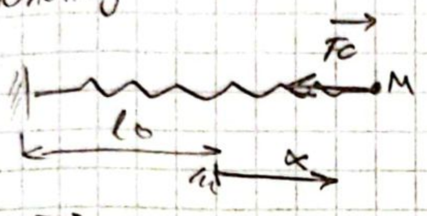
$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

III област

53. Праволинијске осц. Увод

*Кретање тачке дуж праве линије код кога се растојање тачке од неке непокретне тачке више пута смањује и повећава — праволинијске осцилације

- Централне силе — теже да врате тачку у равнотежни положај



$\vec{F_c} = -c x \vec{i}$

$\vec{F_w}$ — сила отпора

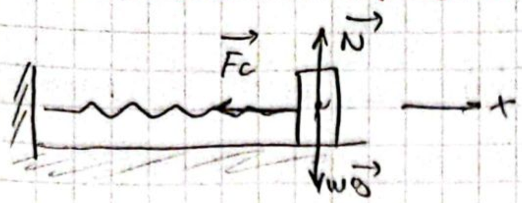
↳ $\vec{F_{vt}}$ — сила отпора вискозног трења

↳ $\vec{F_T}$ — сила сувог трења

$\vec{F_\Omega}$ — принудна сила

1. слободне непригушене осц.
   $(\vec{F_c})$
2. слободне пригушене осц.
   $(\vec{F_w}, \vec{F_c})$
3. принудне непригушене осц.
   $(\vec{F_\Omega}, \vec{F_c})$
4. принудне пригушене осц.
   $(\vec{F_c}, \vec{F_w}, \vec{F_\Omega})$

54. Слободне непригушене осцилације



$m\vec{a} = \vec{F_c} + \vec{N} + m\vec{g}$ $\qquad$ $\vec{F_c} = -cx\vec{i}$

$\vec{N} = N\vec{j}$

$m\vec{g} = -mg\vec{j}$

$m\ddot{x} = -cx$

$m\ddot{x} + cx = 0 \quad / : m$

$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$

$\frac{c}{m} = \omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$

$\lambda_{12} = \pm i\omega$

$x = x_h = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ $\qquad x_0$

$\dot{x} = -C_1\omega \sin\omega t + C_2\omega \cos\omega t$ $\qquad \dot{x}_0$

$x_0 = C_1$ $\qquad C_2\omega = \dot{x}_0$

$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$

$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t$

$x = A\sin(\omega t + \alpha)$

A - амплитуда осц. $\qquad \omega t + \alpha = \varphi$ - фаза осц.

$x = A\sin(\omega t)\cos\alpha + A\cos\omega t \sin\alpha$

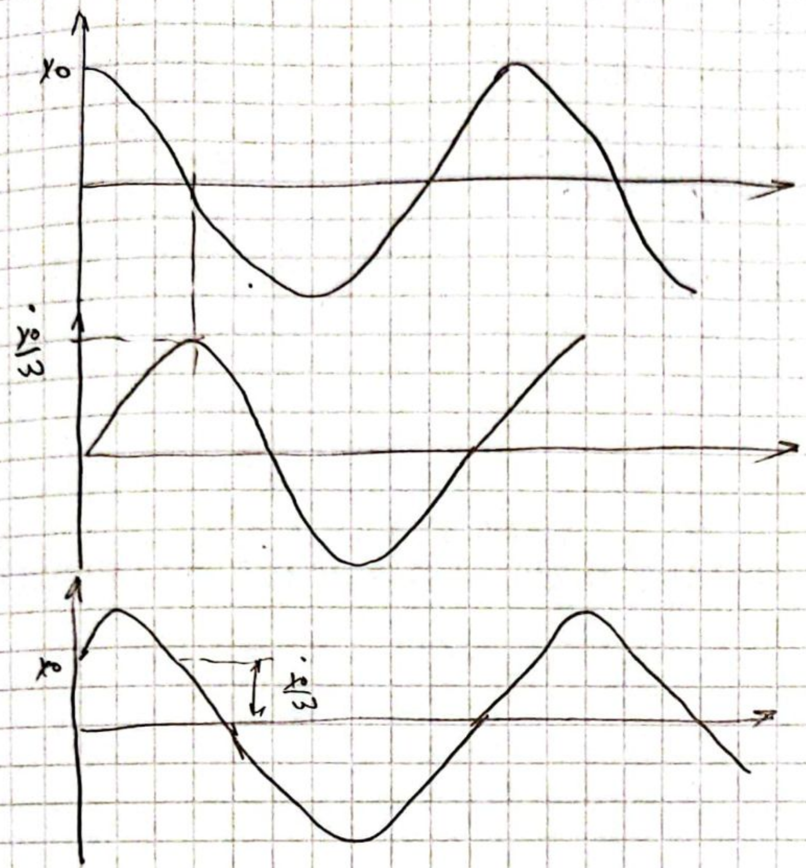
$A\cos\alpha = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$ $\qquad A\sin\alpha = x_0$

$A^2 = A^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

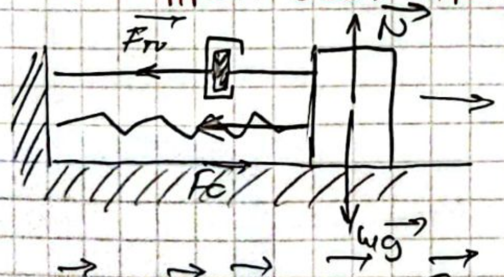
$A^2 = \left(\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} + x_0^2\right)$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $\qquad f = \frac{1}{T}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0}$$



55. Слоб. пригуш. осц. при $\vec{F}_{TV}$, мало пригушење



$$\vec{F}_{TV} = -b\cdot\vec{v} = -b\dot{x}\frac{\vec{v}}{v}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{TV} + \vec{F}_C$$

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad /:m$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \qquad \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega \qquad 2\delta = \frac{b}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega^2}}{2}$$

$$\lambda_{12} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \qquad \delta^2 - \omega^2 = p \qquad \lambda_{12} = -\delta \pm p$$

1) $\delta < \omega$ мало пригушење

2) $\delta = \omega$ гранично пригушења

3) $\delta > \omega$ велико пригушење

Privatni časovi
LaganiniMašinac
065 22 54 100

$$* \; x_h = x = e^{-\delta t}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt)$$

* важи за сва 3 случаја

1) $\delta < \omega \quad \delta^2 - \omega^2 < 0 \;, \; p < 0$

$$\lambda_{12} = -\delta \pm i p$$

$$\dot{x} = -\delta e^{-\delta t}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt) + e^{-\delta t}(-pC_1 \sin pt + C_2 p \cos pt)$$

$$x_0 = C_1$$

$$\dot{x}_0 = -\delta C_1 + C_2 p$$

$$\dot{x}_0 + \delta x_0 = C_2 p$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{p}$$

$$x = e^{-\delta t}\left(x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{p} \sin pt\right)$$

$$x(t) = A e^{-\delta t} \sin(pt + \alpha)$$

$$x(t) = A e^{-\delta t} \sin pt \cos\alpha + A e^{-\delta t} \cos pt \sin\alpha$$

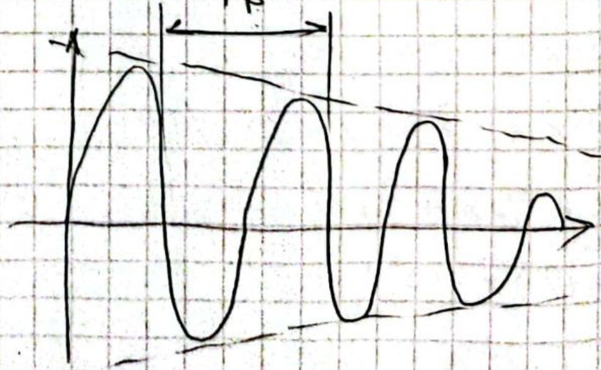
$$A \cos\alpha = \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{p}$$

$$A \sin\alpha = x_0$$

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{p}\right)^2$$

$$T_p = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta^2 - \omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{p x_0}{\dot{x}_0 + \delta x_0}$$



$$\underline{T_p > T}$$

иста слика као 55.

56. Слоб. приг. при $\vec{F}_{ot}$ – велико и гранично приг.

$$x_h = e^{-\delta t}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt)$$

3) $\delta > \omega$, $\delta^2 - \omega^2 > 0$

$$\delta^2 - \omega^2 = g^2 \longrightarrow \lambda_{12} = -\delta \pm g$$

$$x_h = e^{-\delta t}(A_1 e^{gt} + A_2 e^{-gt})$$

$$\dot{x} = -\delta e^{-\delta t}(A_1 e^{gt} + A_2 e^{-gt}) + e^{-\delta t}(g A_1 e^{gt} - A_2 g e^{-gt})$$

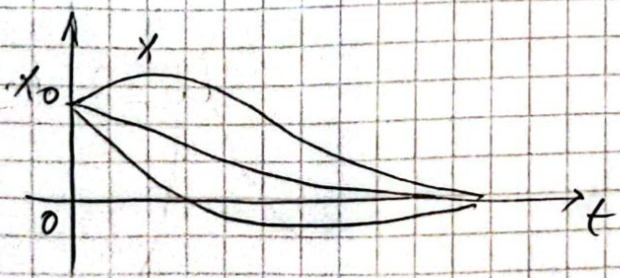
$$x_0 = A_1 + A_2$$

$$\dot{x}_0 = -\delta(A_1 + A_2) + gA_1 - gA_2$$

$$g(A_1 - A_2) = \dot{x}_0 + \delta x_0$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 - A_2 &= \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{g} \\ A_1 + A_2 &= x_0 \end{aligned}\right\} +$$

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0 + x_0 g}{2g}, \quad A_2 = -\frac{\dot{x}_0 + \delta x_0 - x_0 g}{2g}$$



*сва ова кретања су неосцилаторна

2) $\delta = \omega$ $\delta^2 - \omega^2 = 0$

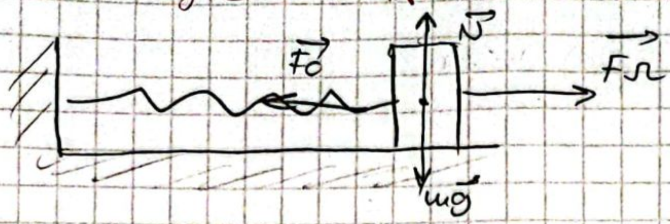
$$\lambda_{12} = -\delta$$

$$x_h = e^{-\delta t}(C_1 t + C_2)$$

$$\lim_{t\to\infty}(t e^{-\delta t}) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\delta t}} = 0$$

*пригушено неосцилаторно кретање

57. Принудне неприг. : Нерезонантни случај



$F_\Omega = F_0 \cos \Omega t$

$m\vec{a} = \vec{F_\Omega} + m\vec{g} + \vec{F_c} + \vec{N}$

$m\ddot{x} = F_0 \cos \Omega t - cx$

$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$ $\qquad \frac{F_0}{m} = h$

$\ddot{x} + \omega^2 x = h \cdot \cos \Omega t$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

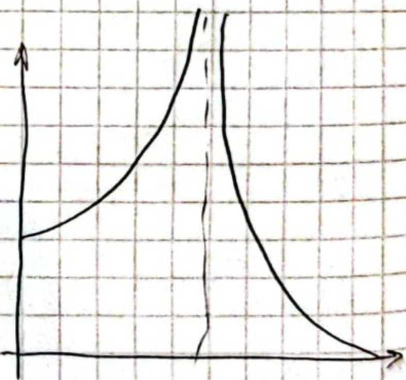
$x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

1) $\Omega = \omega$ рез. случај

2) $\Omega \neq \omega$ нерез. случ. $\qquad \omega >> 0$

3) $\Omega \approx \omega$ бијење

(2) Нерезонантни случај



$x_p = A \cos \Omega t$

$\dot{x}_p = -\Omega A \sin \Omega t$

$\ddot{x}_p = -\Omega^2 A \cos \Omega t$

$-\Omega^2 A \cos \Omega t + \omega^2 A \cos \Omega t = h \cos \Omega t$

$A(\omega^2 - \Omega^2) = h$

$A = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}$

$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$

$\dot{x}(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t - \frac{h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t$

$$x_0 = C_1 + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \qquad C_1 = x_0 - \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$\dot{x}_0 = C_2\omega \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\right)\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\cos\Omega t$$

→ две хармонијске осц. са разл. фрекв.

58. Принудне неприг. резонантни случај, нацрт слика

$$x_h = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

$$\Omega = \omega$$

$$x_p = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$\dot{x}_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t + t(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)$$

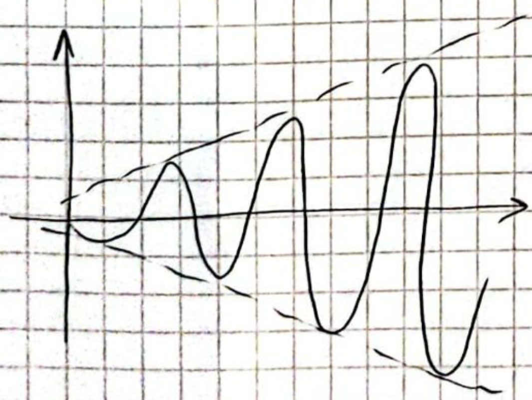
$$\ddot{x}_p = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t - A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$
$$+ t(-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t)$$

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = h\cos\omega t$$

$$x_p = Bt\sin\Omega t \Rightarrow \frac{h}{2\omega}t\sin\omega t$$

$$A = 0 \quad B = \frac{h}{2\omega}$$

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$$



59. Бијење $\omega \approx \Omega$

- када се ω мало разликује од Ω

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2-\Omega^2}(\cos\Omega t - \cos\omega t)$$

$$x_0 = \dot{x}_0 = 0$$

$$x = \frac{h}{\omega^2-\Omega^2}(\cos\Omega t - \cos\omega t)$$

$$\cos\Omega t - \cos\omega t = -2\sin\left(\frac{\Omega+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega-\omega}{2}t\right)$$

уводимо $\omega - \Omega = 2\Delta$

$$\cos\Omega t - \cos\omega t = -2\sin(\Omega+\Delta)t\,\sin(-\Delta t)$$

$$\omega \approx \Omega,\ \omega \gg 0$$

$$\sin(\Omega+\Delta)t \approx \sin\Omega t$$

$$\cos\Omega t - \cos\omega t = +2\sin\Omega t\sin\Delta t$$

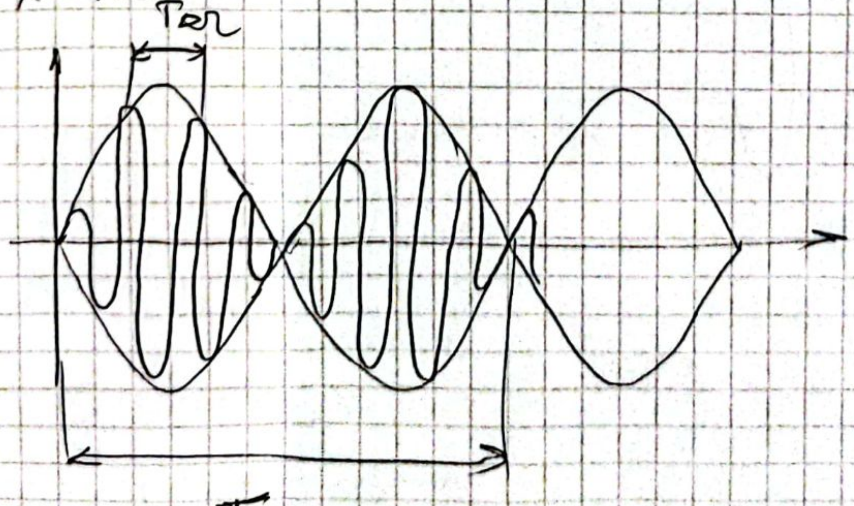
$$\omega^2-\Omega^2 = (\omega-\Omega)(\omega+\Omega) \approx 2\Delta 2\Omega = 4\Delta\Omega$$

$$x = \left(\frac{h}{2\Delta\Omega}\sin\Delta t\right)\sin\Omega t$$

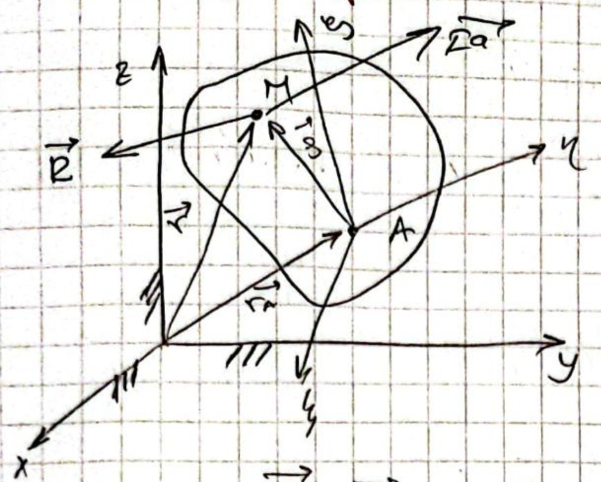
$$A(t) = \frac{h}{2\Delta\Omega}\sin\Delta t$$

$$T_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta}$$

$$x = A\sin\Omega t$$



60. Диф. jне релативног кретања тачке. Релативна равнот.



$$m\vec{a} = \vec{F^a} + \vec{R}$$

$$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_p} + \vec{a_{cor}}$$

$$\vec{a_p} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

$$\vec{a_r} = \frac{d_r \vec{V_r}}{dt}$$

$$\vec{a_{cor}} = 2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = 2\vec{\omega} \times \vec{V_r}$$

$$\vec{F_{p}^{in}} = -m\vec{a_p} = -m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

$$\vec{F_{cor}^{in}} = -m\vec{a_{cor}} = -m\vec{\omega} \times \vec{V_r}$$

$$m\vec{a_r} = \vec{F^a} + \vec{R} + \vec{F_p^{in}} + \vec{F_{cor}^{in}}$$

$$\vec{V_r} = \frac{d_r\vec{\rho}}{dt} = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\varsigma}\vec{\nu}$$

$$\vec{a_r} = \frac{d_r\vec{V_r}}{dt} = \ddot{\xi}\vec{\lambda} + \ddot{\eta}\vec{\mu} + \ddot{\varsigma}\vec{\nu}$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= F_\xi^a + R_\xi + F_{p\xi}^{in} + F_{cor\xi}^{in} \\ m\ddot{\eta} &= F_\eta^a + R_\eta + F_{p\eta}^{in} + F_{cor\eta}^{in} \\ m\ddot{\varsigma} &= F_\varsigma^a + R_\varsigma + F_{p\varsigma}^{in} + F_{cor\varsigma}^{in} \end{aligned}\right\}$$

покретни коо систем $O_{\xi\eta\varsigma}$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{s} = m\frac{dV_r}{dt} &= F_t^a + R_t + F_{pt}^{in} \\ m\frac{V_r^2}{\rho_k} &= F_n^a + R_n + F_{pn}^{in} + F_{corn}^{in} \\ 0 &= F_b^a + R_b + F_{pb}^{in} + F_{corb}^{in} \end{aligned}\right\}$$

природни триедар

* релативно равнотежа

$V_r = 0$, $a_r = 0$ $\qquad$ $0 = \vec{F_p^{in}} + \vec{F^a} + \vec{R}$

$F_{cor} = 0$

61. Теорема о промени кин ен при релативном кретању

$$m\vec{a_r} = \vec{F^a} + \vec{R} + \vec{F_p^{in}} + 2m(\vec{\omega}\times\vec{v_r})$$

$$m\frac{d_r\vec{v_r}}{dt} = \vec{F_a} + \vec{R} + \vec{F_p^{in}} + \cancel{2m(\vec{\omega}\times\vec{v_r})} \quad / \cdot \vec{v_r}\, dt$$

$$m\vec{v_r}\, d_r\vec{v_r} = \vec{F_a}\, d_r\vec{\rho} + \vec{R}\, d_r\vec{\rho} + \vec{F_p^{in}}\, d_r\vec{\rho}$$

$$\vec{v_r} = \frac{d_r\vec{\rho}}{dt}$$

$$\vec{v_r}\, dt = d_r\vec{\rho}$$

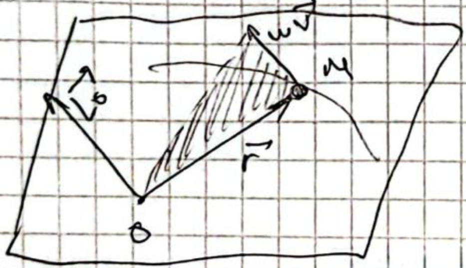
$$\frac{1}{2} m\, d(\vec{v_r})^2 = \delta A_r(\vec{F_a}) + \delta A_r(\vec{R}) + \delta A_r(\vec{F_p^{in}})$$

$$d_r E_k = \delta A_r(\vec{F_a}) + \delta A_r(\vec{R}) + \delta A_r(\vec{F_p^{in}}) \quad / \int$$

$$E_{kr2} - E_{kr1} = A_{r12}(\vec{F_a}) + A_{r12}(\vec{R}) + A_{r12}(\vec{F_p^{in}})$$

Коначна промена кин. ен. при њеном релативном кретању једнака је збиру радова свих активних сила, реакција ослонаца и преносне ин. силе.

62. Кретање тачке под дејством централне силе. Увод



$$\vec{L_O} = m(\vec{r}\times\vec{v}) = const$$

$$\vec{L_O} = \vec{r}\times m\vec{v} = \vec{r_0}\times m\vec{v_0}$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r_0} \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v_0}$$

$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$ — секторска брзина

$$2\vec{S} = \vec{r}\times\vec{v}$$

$$2m\vec{S} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

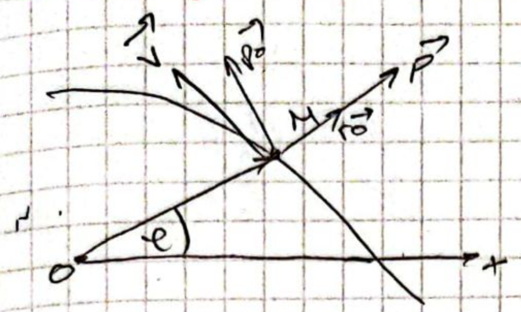
$$2m\vec{S} = \vec{L_O} = const$$

$$\vec{S} = const$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{r_0} & \vec{p_0} & \vec{k} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix}$$

$$S_z = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = const$$

63. Диф јна. кретања тачке под дејством централне сле



$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \vec{F} = F_r$$

$$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_\varphi}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$r^2\dot{\varphi} = 2C = const$$

64. Бинеова једн. кретање тачке дејством Њутнове сile опште грав.

$$F_r = F_r(r)$$

$$\vec{r_0} \times m\vec{v_0} \neq 0$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$$

$$r^2\dot{\varphi} = 2C \qquad \dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{2C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -2C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = \frac{2C}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(-2C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -4\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F_r}{4mC^2}$$